

УДК 519.816

ОБЧИСЛЕННЯ ВІДНОСНИХ ВАГ КРИТЕРІЇВ ОЦІНКИ АЛЬТЕРНАТИВ НА ОСНОВІ ЧІТКИХ ТА НЕЧІТКИХ РАНЖИРУВАНЬ

С.В. Каденко

Інститут проблем реєстрації інформації НАН України

e-mail: sergeykadenko@mail.ru

Вступ

Як відомо, ординальне експертне оцінювання (ранжирування) альтернатив застосовується у випадках, коли експерти в змозі надати інформацію лише про якісне, а не кількісне співвідношення між альтернативами. Якщо під час багатокритеріального оцінювання експертам важко надати оцінки відносної вагомості критеріїв, має сенс намагатися знайти ваги критеріїв на базі попереднього досвіду оцінювання альтернатив за цими критеріями. Результати таких обчислень можуть бути більш адекватними та об'єктивними, аніж результати безпосереднього оцінювання, адже вони відображатимуть весь досвід експертів, усі їхні знання про предметну область, а не лише поточні судження. Задачу визначення ваг критеріїв на основі досвіду багатокритеріального ранжирування альтернатив сформульовано та вирішено, зокрема, у [1,2]. У даній доповіді пропонується розгляд наступних питань: формулювання та вирішення аналогічної задачі у випадку, коли експертні оцінки альтернатив задані у випадку нечітких ранжирувань, та розробка шляхів спрощення процесу експертного оцінювання альтернатив та підвищення адекватності результатів оцінювання, тобто відповідності оцінок, даних експертом, рівню його знань про предметну область.

Постановка задачі для випадку чітких ранжирувань

Дано: множина альтернатив $A_1, A_2, \dots, A_m$; множина незалежних за перевагами, сумісних між собою [3] критеріїв оцінки альтернатив $C_1, C_2, \dots, C_n$; ранжирування альтернатив за критеріями $\{r_{ij}\}, i=1..m, j=1..n$, де r_{ij} – ранг i -ї альтернативи за j -м критерієм; строге ранжирування альтернатив за глобальним (узагальненим) критерієм $G: g_1, \dots, g_m$. Треба знайти: множину нормованих ваг критеріїв оцінки альтернатив: $\{w_j\}, j=1..n$; $\sum_{j=1}^n w_j = 1, w_j > 0, j=1..n$, які б дозволяли при агрегації (узагальненні) однокритеріальних ранжирувань зберегти ранжирування альтернатив за глобальним критерієм.

Опис методу розв'язання

Якщо припустити, що глобальне ранжирування альтернатив будується за допомогою «зваженого» методу Борда [4], то задача полягає у пошуку розв'язку системи нерівностей наступного вигляду:

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} \times w_j > 0, i=1..m-1; w_j > 0, j=1..n \quad (1)$$

де $a_{ij} = r_{i+1,j} - r_{ij}$: нехай альтернативи пронумеровані у порядку спадання глобальних рангів. Якщо припустити, що транзитивність глобального відношення може порушуватись, то $i=1..m(m-1)/2$. Кожна нерівність відповідає парному порівнянню двох альтернатив A_i та A_j . Якщо A_i домінує над A_k за глобальним критерієм G , то $A_i \succ A_k \Rightarrow g_i < g_k \Rightarrow \sum_{j=1}^n w_j r_{ij} < \sum_{j=1}^n w_j r_{kj} \Rightarrow \sum_{j=1}^n w_j (r_{kj} - r_{ij}) > 0 \Rightarrow \sum_{j=1}^n a_{lj} \times w_j > 0$, де $a_{lj} = r_{kj} - r_{ij}$, а l – це номер відповідної нерівності у системі (1). У загальному випадку задачу можна розв'язати за допомогою методу, викладеного у [1,2].

Якщо припустити, що агрегація однокритеріальних ранжирувань відбувається за «зваженим» правилом Кондорсе [4], то метод розв'язання задачі буде дещо відрізнятися від

вищезгаданого, адже нерівності формуватимуться в інший спосіб. Як відомо, у методі Кондорсе фігурують матриці домінування, що відповідають ранжируванням альтернатив. Кожний елемент d_{ij} матриці домінування $D = \{d_{ij}, i, j = 1..m\}$, яка відповідає ранжируванню $R = \{r_i, i = 1..m\}$ є результатом ординального парного порівняння альтернатив A_i та A_j , і визначається наступним чином:

$$d_{ij} = 1, A_i \succ A_j; d_{ij} = -1, A_i \prec A_j; d_{ij} = 0, A_i \equiv A_j \quad (2)$$

Для того, щоб отримати узагальнене відношення переваги на множині альтернатив за «зваженим» правилом Кондорсе, слід здійснити зважене сумування відповідних однокритеріальних ординальних парних порівнянь d_{ij} (а не самих рангів альтернатив, як у методі Борда). Тож, система нерівностей формуватиметься за наступним принципом: нехай, A_i переважає A_k за глобальним критерієм G . Тоді

$$A_i \succ A_k \Rightarrow g_i < g_k \Rightarrow \sum_{s=1}^m d_{is}^{(G)} > \sum_{s=1}^m d_{ks}^{(G)} \Rightarrow \sum_{j=1}^n w_j \sum_{s=1}^m (d_{is}^{(j)} - d_{ks}^{(j)}) > 0 \Rightarrow \sum_{j=1}^n a_{lj} \times w_j > 0,$$

де $a_{lj} = \sum_{s=1}^m (d_{is}^{(j)} - d_{ks}^{(j)})$, а l – номер відповідної нерівності у системі (1).

Літвак у відповідній праці [5] доводить, що для існування лінійного узагальненого критерію (G) необхідно і достатньо, щоб оцінки за всіма його підкритеріями виражалися у шкалі відношень. Це означає, що у методі Борда під час агрегації оцінок має відбуватися евристичний перехід від рангів до кардинального співвідношення альтернатив (напр., альтернатива із рангом 2 вважається вдвічі гіршою за альтернативу із рангом 1). Метод Кондорсе дозволяє уникнути цього евристичного переходу. Ще одна перевага методу Кондорсе – можливість його узагальнення на випадок нечітких ранжирувань (див. нижче).

Випадок нечітких ранжирувань

Якщо експерт, який будує ранжирування альтернатив, не впевнений у тому, яка альтернатива домінує у заданій парі, він може задавати відношення переваг на множині альтернатив у вигляді нечітких ранжирувань. Процедури ранжирування нечітких чисел запропоновані та описані, зокрема, у [6-8]. Відношення переваги між двома нечіткими числами A та B (із заданими функціями приналежності), запропоноване у [7], будується наступним чином:

$$R(A, B) = (S(A, B) + S(A \cap B, 0)) / (S(A, 0) + S(B, 0)) \quad (3)$$

де $S(A, B)$ визначає відрізки, на яких A переважає B , $S(B, A)$ – відрізки, на яких B переважає A , $S(A, 0)$ – відрізки, де відмінна від 0 лише функція приналежності A , $S(B, 0)$ – відрізки, де відмінна від 0 лише функція приналежності B , $S(A \cap B, 0)$ – відрізки, де функції приналежності «перекриваються», і A та B вважаються еквівалентними. Для побудови нечіткого відношення порядку на множині за m у [6,8] пропонується використати матричну форму: $[P(A_i, A_j)]_{m \times m}$, де кожний елемент відображає значення нечіткого відношення переваги з діапазону $[0,1]$. Формула агрегації, яку використовують автори [8] – наступна:

$$p''(A_i, A_k) = \left\{ \left(\sum_{j=1}^n w_j \{ \max((P(A_i, A_k) - 0.5), 0) \} \right) / \left(\sum_{j=1}^n w_j |P(A_i, A_k) - 0.5| \right), i \neq k; 0.5, i = k; \right. \quad (4)$$

Оскільки сформульовано правила побудови та агрегації нечітких ранжирувань альтернатив, можна узагальнити наведену вище постановку (зворотної) задачі на випадок нечітких ранжирувань. У цій постановці замість рангів альтернатив за критеріями фігуруватимуть матриці нечітких ранжирувань: $\{d_{ik}^j\}, i, k = 1..m, j = 1..n$, де d_{ik}^j відбиватиме значення переваги i -ї альтернативи над k -ю за j -м критерієм. При цьому $d_{ik}^j \in [0,1]$; $d_{ik}^j = 1 - d_{ki}^j$. Також у постановці задачі для нечітких ранжирувань альтернатив вважатиметься, що агрегація однокритеріальних переваг здійснюватиметься за формулою (4). Якщо ранжирування альтернатив за глобальним критерієм – нечітке, то формулу (4) можна звести

до лінійного вигляду. Тоді для обчислення ваг знадобиться розв'язати систему (5) з $(m(m-1)/2)+1$ лінійного рівняння з n невідомими.

$$\left\{ \sum_{j=1}^n w_j b_{ik}^j = 0, i, k = 1..m, i \neq k; \sum_{j=1}^n w_j = 1; w_j > 0, j = 1..n \right. \quad (5)$$

У загальному випадку система (5) буде надлишковою, не матиме точного розв'язку, а для її розв'язання можна буде застосувати відомі методи, такі як МНК, МГУА та ін.

Напрямки подальшого узагальнення методу визначення вагомості критеріїв на основі нечітких ранжирувань

У [8] для експертного оцінювання альтернатив за якісними (intangible) критеріями застосовується лінгвістична шкала з семи поділок, запропонована у [9]. Експертні оцінки у цій шкалі несуть інформацію, дещо іншу від тої, що міститься у чітких ранжируваннях альтернатив (вони дозволяють відобразити судження експерта на зразок: «я не впевнений, але схильний вважати, що перша альтернатива переважає другу»). До того ж, процедури агрегації чітких [4] та нечітких [6-8] ранжирувань різняться між собою, тож результати обчислення ваг критеріїв на основі нечітких та чітких ранжирувань також будуть різними. Фактично, це означає, що задачі визначення ваг критеріїв на основі багатокритеріальних ранжирувань альтернатив у випадках, коли ранжирування альтернатив за глобальним критерієм є нечітким, складають окремий клас, на який неможна в чистому вигляді узагальнювати підходи, викладені у [1,2]. Варто розглянути проміжний клас задач, коли ранжирування альтернатив за глобальним критерієм G є чітким, а ранжирування за його підкритеріями $C_1, C_2, \dots, C_n$ – нечіткими (див. постановку задачі на початку доповіді). В цьому випадку організатор експертизи матиме змогу зафіксувати невизначеність у судженнях експертів щодо однокритеріальних відношень переваг між альтернативами, а ваги критеріїв оцінки альтернатив можна буде обчислювати за допомогою методу, оберненого до методу Кондорсе (див. вище).

Недоліком наявних процедур нечіткого експертного ранжирування альтернатив є їхня складність. Для ранжирування нечітких чисел запропоновано досить багато підходів (зокрема, у [8-10]). Для побудови нечітких ранжирувань експерти мають задавати певні чисельні (кардинальні, а не ординальні) значення оцінок альтернатив, які потім використовуються для побудови функцій приналежності. Якщо б вони вводили значення ординальних парних порівнянь альтернатив безпосередньо у матриці (на зразок тих, що фігурують у методі Кондорсе та у [6]), то процедуру буде спрощено. У цьому випадку вони можуть використовувати шкалу перевага Сааті [11]. Парні порівняння задані у цій шкалі можуть відображати *ступінь впевненості експерта* у перевазі одної альтернативи з відповідної пари над іншою (а не саме значення парного порівняння). Цікаві міркування з цього приводу наведені у [6]: доцільно припустити, що експерт більш впевнений у своїй оцінці співвідношення між альтернативами, які суттєвіше різняться між собою.

Одною з найбільш розповсюджених процедур агрегації парних порівнянь, заданих у шкалі Сааті, є середнє геометричне (переваги та недоліки методу описані, зокрема, у [12]). Цю процедуру можна звести до простого зваженого сумування, якщо судження експертів виразити як логарифми значень, заданих у шкалі Сааті. Даний прийом дозволить узагальнити процедуру обчислення ваг критеріїв, обернену до «зваженого» методу Кондорсе, на випадок, коли експерти задають однокритеріальні ординальні переваги не тільки як 1, 0 чи -1 (див. вище), а як значення з усього діапазону від -1 до 1: значення зі шкали Сааті, $\{1/9; 1/8; \dots; 1/2; 1; 2; \dots; 9\}$ перетворюються на $\{\log_9(1/9); \dots; \log_9 1; \dots; \log_9 9\}$ або $\{-1; -0.95; \dots; -0.32; 0; 0.32; \dots; 1\}$. 9 є найбільшим значенням у шкалі переваг Сааті, тож це число пропонується обрати у якості основи логарифму.

Розглянемо гіпотетичний чисельний приклад. Скажімо, 4 альтернативи $A_1 - A_4$ оцінюються за критеріями $C_1 - C_3$ та за глобальним критерієм G . При цьому глобальне ранжирування – строге: $\{A_1, A_2, A_3, A_4\}$, а оцінки альтернатив за критеріями $C_1 - C_3$ задані у вигляді матриць ординальних парних порівнянь, що відображають переваги експертів та

ступінь упевненості експертів у цих перевагах. Треба знайти вектор ваг критеріїв $C_1 - C_3$, $w_1 - w_3$, що дозволить зберегти строге глобальне ранжирування альтернатив після агрегації однокритеріальних матриць ординальних парних порівнянь за «зваженим» правилом Кондорсе. Відповідні чисельні значення наведені у Таблиці 1.

Таблиця 1

	Критерій C_1				Критерій C_2				Критерій C_3				Ранжирування альтернатив за критерієм G
	A_1	A_2	A_3	A_4	A_1	A_2	A_3	A_4	A_1	A_2	A_3	A_4	
A_1	0	0.63	1	0.63	0	-0.89	-0.73	-0.95	0	0.95	-0.73	-0.95	4
A_2	-0.63	0	0.32	0	0.89	0	0	0	-0.95	0	-1	-1	3
A_3	-1	-0.32	0	-0.32	0.73	0	0	-0.32	0.73	1	0	-0.32	2
A_4	-0.63	0	0.32	0	0.95	0	0.32	0	0.95	1	0.32	0	1

Використавши метод, обернений до «зваженого» правила Кондорсе, стисло описаний на початку доповіді, можна знайти область допустимих значень ваг (розв'язок системи нерівностей, побудованої на основі заданих однокритеріальних матриць ординальних парних порівнянь): її крайні точки – $W_1=(0.4132, 0.4174, 0.1694)$; $W_2=(0.0000, 0.3909, 0.6091)$; $W_3=(0.0000, 0.9030, 0.0970)$ та центр мас: $W=(0.1377, 0.5704, 0.2918)$.

Висновки

Запропоновано можливі шляхи узагальнення методів визначення ваг критеріїв на основі досвіду багатокритеріального ординального оцінювання альтернатив на випадок, коли експертні оцінки задані у вигляді нечітких ранжирувань. Нечіткі ранжирування дозволяють зафіксувати невизначеність експертних суджень і несуть інформацію дещо іншого характеру, аніж та, що міститься у чітких ранжируваннях, тому проблематично порівнювати результати методів, що використовують у якості вихідних даних лише чіткі, або лише нечіткі оцінки. Також запропоновано ідею спрощення процесу отримання нечітких експертних ранжирувань із використанням інструментарію методу аналізу ієрархій.

Література

1. Каденко С.В. Метод визначення коефіцієнтів відносної вагомості критеріїв на основі ординальних оцінок із зворотнім зв'язком / С.В. Каденко // Сборник докладов пятой научно-практической конференции с международным участием «Системы поддержки принятия решений. Теория и практика. СППР'2009» - Киев, 2009 – С. 39-42.
2. Каденко С.В. Про один підхід до прийняття кадрових рішень / С.В. Каденко, В.В. Циганок // Реєстрація зберігання і обробка даних – 2009 - Том 11, № 3 – С. 66-74.
3. Тоценко В.Г. Методы и системы поддержки принятия решений. Алгоритмический аспект [Текст] / В.Г. Тоценко; ИПРИ НАНУ. – К.: Наукова думка, 2002. – 382 с.
4. Тоценко В.Г. Методы определения групповых многокритериальных ординальных оценок с учетом компетентности экспертов / В.Г. Тоценко // Проблемы управления и информатики – 2005 – № 5 – С. 84-89.
5. Литвак Б.Е. Экспертная информация. Методы получения и анализа [Текст] / Б.Е. Литвак. – М.: Радио и связь, 1982. – 185 с.
6. Tanino, T. Fuzzy preference orderings in group decision-making // T. Tanino / Fuzzy Sets and Systems – 1984 – № 12 – pp. 117-131
7. Tseng T.Y. New Algorithm for the Ranking Procedure in Fuzzy Decision-Making / T.Y. Tseng, C. M. Klein // IEEE Transactions on Systems, Man and Cybernetics – 1989 – Vol.19, No.5 – pp.1289-96.
8. Jiao J. Fuzzy Ranking for Concept Evaluation in Configuration Design for Mass Customization / J. Jiao, M.M. Tseng // Concurrent Engineering: Research and Application – 1998– 6(3) – pp.189-206.
9. Chen, S.J. et al. Fuzzy Multiple Attribute Decision Making: Methods and Applications, Berlin; Hong Kong: Springer-Verlag - 1992.
10. Deep K. Ranking of Alternatives in Fuzzy Environment Using Integral Value / K. Deep, M.L. Kansal, K.P. Singh // Journal of Mathematics, Statistics and Allied Fields – 2007 – 1(2): [Електрон. ресурс]. – Режим доступу: <http://www.scientificjournals.org/journals2007/articles/1234.pdf>
11. Saaty T.L. The Analytic Hierarchy Process: planning, priority setting, resource allocation / T.L. Saaty – NY, McGraw Hill, 1980 – 287 p.
12. Choo, E.U. A common framework for deriving preference values from pairwise comparison matrices / E.U. Choo, W.C. Wedley // Computers and Operations Research – 2004 – 31 – pp. 893-908.