

УДК 519.816

БАГАТОКРИТЕРІАЛЬНЕ ОЦІНЮВАННЯ АЛЬТЕРНАТИВ ПРИ ВЗАЄМОЗАЛЕЖНИХ КРИТЕРІЯХ ЗА ДОПОМОГОЮ МЕТОДУ BOCR/MAI ТА НЕЧІТКИХ МІР

Н.І. Недашківська

Інститут прикладного системного аналізу НТУУ «КПІ» МОН і НАН України

e-mail: n.nedashkivska@gmail.com

Вступ

Розглядається задача багатокритеріального аналізу скінченної множини альтернатив рішень за множиною конфліктних взаємозалежних критеріїв. Метод BOCR аналізу ієрархій (BOCR/MAI) [1] заснований на оцінюванні доходів, витрат, можливостей та ризиків для альтернатив рішень. В цьому методі будуються окремі ієрархії для цих чотирьох якостей з однаковими множинами альтернатив на нижньому рівні. Здійснюється агрегування ваг (пріоритетів) альтернатив в кожній ієрархії, а потім розраховуються заключні ваги (пріоритети) альтернатив агрегуванням значень за доходами, витратами, можливостями та ризиками. В реальних задачах аналізовані варіанти рішень завжди мають переваги і недоліки, а включення до розгляду можливостей як майбутніх доходів та ризиків як майбутніх витрат від реалізації альтернатив є ефективним засобом підтримки прийняття складних рішень.

В методі BOCR/MAI агрегування ваг альтернатив в кожній ієрархії BOCR здійснюється за лінійною згорткою. Однак, використання лінійної згортки для агрегування є виправданим коли критерії взаємно незалежні. В більшості ж задач вибору мають місце різного виду залежності як між альтернативами та критеріями рішень, так і між самими критеріями. Розширенням лінійної згортки на випадок взаємозалежності критеріїв є неадитивний нечіткий інтеграл Шоке [2, 3] за нечіткою мірою. Нечітка міра представляє єдиний підхід до представлення точних, невизначених, неповних, нечітких значень критеріїв. В роботах [4, 5] ступінь важливості підмножини критеріїв виражається суб'єктивною мірою, яка є нечіткою мірою, визначеною на множині всіх підмножин множини критеріїв.

В даній роботі метод BOCR/MAI в поєднанні з неадитивними нечіткими інтегралами Шоке і Сугено пропонується використовувати для багатокритеріального оцінювання альтернатив при взаємозалежних критеріях доходів, витрат та ризиків. Показано, що використання нечіткої міри дозволяє більш адекватно формалізувати зв'язки між критеріями та такі очікування експерта як песимізм, оптимізм і прагматизм.

Постановка задачі

Дано: $A = \{a_i \mid i = 1, \dots, n\}$ – множина альтернативних варіантів рішень;
 $B = \{b_k \mid k = 1, \dots, n_B\}$, $C = \{c_l \mid l = 1, \dots, n_C\}$, $O = \{o_p \mid p = 1, \dots, n_O\}$, $R = \{r_q \mid q = 1, \dots, n_R\}$ – множини критеріїв доходів (B), витрат (C), можливостей (O) та ризиків (R), що характеризують якість альтернатив рішень; критерії b_k взаємозалежні, критерії c_j , o_p , r_q взаємозалежні.

Потрібно: знайти глобальні ваги альтернатив за всіма критеріями BOCR.

Розв'язання задачі

Для розв'язання задачі розглянемо наступну ієрархічну структуру підтримки прийняття рішень (рис.1). На першому рівні цієї ієрархії розташовані критерії, що відповідають за інтегральну якість рішення. До таких критеріїв можуть відноситися критерії добробуту, безпеки, прогресу тощо. Вони використовуються для розрахунку ваг якостей доходів, витрат, можливостей та ризиків (BOCR). На наступному рівні знаходяться ієрархії критеріїв для кожної з якостей BOCR. Альтернативи рішень формують останній рівень ієрархії.

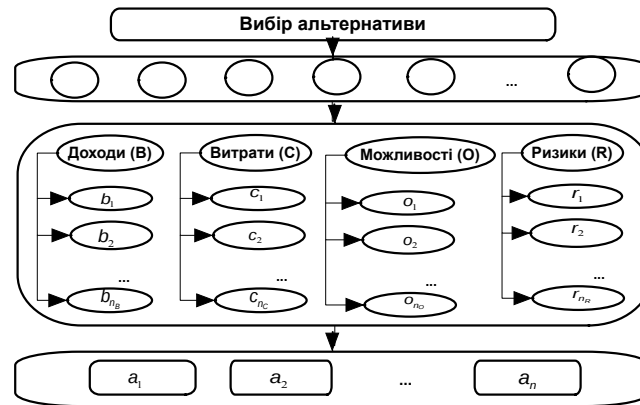


Рис.1. Ієрархічна структура задачі вибору альтернативи за якостями BOCR

Розглянемо етапи методу BOCR/MAI [1].

1. Розрахунок ваг якостей BOCR за інтегральними критеріями першого рівня ієрархії.
2. Розрахунок ваг критеріїв доходів b_k , витрат c_j , можливостей o_p і ризиків r_q , $k=1, \dots, n_B$, $j=1, \dots, n_C$, $p=1, \dots, n_O$, $q=1, \dots, n_R$.
3. Розрахунок локальних ваг альтернатив рішень за кожним критерієм кожної ієрархії BOCR.
4. Агрегування ваг альтернатив на ієрархіях BOCR.
5. Розрахунок глобальних ваг альтернатив шляхом агрегування ваг за BOCR.

Детальніше розглянемо кожний з етапів BOCR/MAI. Якості B , C , O , R оцінюються за інтегральними критеріями. Тоді за заданими експертом ступенями важливості інтегральних критеріїв, які в загальному випадку є взаємозалежними, розраховуються ваги чотирьох якостей B , C , O , R . На другому етапі, використовуючи процедуру парних порівнянь, розраховуються ваги критеріїв b_k , c_j , o_p і r_q , а також всіх підмножин множин B , C , O , R , оскільки критерії доходів є взаємозалежними (так само як критерії витрат, можливостей і ризиків). На третьому етапі альтернативи попарно порівнюються відносно кожного критерію b_k , c_j , o_p і r_q ; використовуючи метод головного власного вектору з матриць парних порівнянь розраховуються локальні ваги альтернатив рішень за кожним критерієм b_k , c_j , o_p і r_q . На четвертому етапі розраховуються ваги альтернатив відносно вершин ієрархій BOCR шляхом агрегування локальних ваг альтернатив за критеріями доходів, витрат, можливостей і ризиків. Ваги, знайдені на четвертому етапі, агрегуються

на п'ятому етапі з урахуванням ваг чотирьох якостей B, C, O, R . Це агрегування може здійснюватися за одним з правил: $BOCR=B \cdot O / (C \cdot R)$; $BOCR=b \cdot B + o \cdot O + c / C + r / R$ або $BOCR=b \cdot B + o \cdot O + (1-c) \cdot C + (1-r) \cdot R$, де b, c, o, r – ваги якостей доходів, витрат, можливостей та ризиків, B, C, O, R – локальні ваги альтернатив за цими якостями.

Розглянемо задачу агрегування за взаємозалежними критеріями.

Постановка задачі розрахунку глобальних ваг за взаємозалежними критеріями

Дано: $A = \{a_i \mid i = 1, \dots, n\}$ – множина альтернативних варіантів рішень;
 $C = \{c_j \mid j = 1, \dots, m\}$ – множина взаємозалежних критеріїв (цілей); $h_i : C \rightarrow [0, 1]$ – оцінки альтернатив за критеріями (цілями), $h_i(c_j)$ – оцінка a_i за c_j .

Потрібно: знайти $W^{glob} = \{w_i^{glob}\}$, w_i^{glob} – глобальна вага альтернативи a_i за всіма критеріями (цілями).

Розв'язання задачі розрахунку глобальних ваг за взаємозалежними критеріями

Для представлення залежності між критеріям замість вектора ваг критеріїв $w = \left\{ w_j \mid \sum_{j=1}^m w_j = 1, w_j \geq 0, j = 1, \dots, m \right\}$ будемо використовувати неадитивну функцію множини C , що дозволить визначити вагу не лише одного критерію, а й кожної підмножини C .

Нехай ступінь важливості підмножини з C виражається суб'єктивною мірою, яка є нечіткою мірою на $(C, 2^C)$. Так, $g(\{c_1\})$ виражає ступінь важливості критерію C_1 , $g(\{c_1, c_2\})$ виражає ступінь важливості критеріїв C_1 і C_2 . Ступінь важливості всієї множини критеріїв C дорівнює одиниці. Для агрегування оцінок за множиною взаємозалежних критеріїв та розрахунку глобальних ваг альтернатив будемо використовувати нелінійну згортку у вигляді нечіткого інтегралу від функції h_i за нечіткою мірою g .

Функція $g : \varphi \rightarrow [0, 1]$, де φ – мінімальна σ - алгебра, що містить всі відкриті підмножини множини X , називається нечіткою мірою, якщо вона задовольняє наступним умовам [4, 5]:

- 1) $g(\emptyset) = 0$; $g(X) = 1$; 2) $A, B \in \varphi$ & $A \subseteq B \Rightarrow g(A) \leq g(B)$;
- 3) $\{F_n\}$ - монотонна послідовність $\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} g(F_n) = g(\lim_{n \rightarrow \infty} F_n)$.

Для нечіткої міри в загальному випадку не повинна виконуватися умова адитивності $g(A \cup B) = g(A) + g(B)$. Вираз $g(A)$ представляє собою міру, що характеризує ступінь нечіткості A , тобто оцінку нечіткості судження $X \in A$. (X, φ, g) називається нечітким вимірним простором.

Для побудови нечітких мір використовується наступне λ - правило. Нехай $A, B \in \varphi$, $A \cap B = \emptyset$, тоді $g_\lambda(A \cup B) = g_\lambda(A) + g_\lambda(B) + \lambda g_\lambda(A) g_\lambda(B)$, $\lambda \in (-1, \infty)$. Параметр λ називається параметром нормування міри g_λ .

Для дискретної множини $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ значення нечіткої міри $g_i = g_\lambda(\{x_i\})$:

$$g_\lambda(\{x_1, x_2, \dots, x_n\}) = \sum_{i=1}^n g_i + \lambda \sum_{i_1=1}^{n-1} \sum_{i_2=i_1+1}^n g_{i_1} g_{i_2} + \dots + \lambda^{n-1} g_1 g_2 \dots g_n = \frac{1}{\lambda} \left(\prod_{i=1}^n (1 + \lambda g_i) - 1 \right) \text{ при } \lambda \in (-1, \infty) \text{ [3].}$$

Нечітка міра є узагальненням імовірнісної міри, оскільки згідно з нечіткою мірою ступінь істинності для істинного висловлювання не завжди дорівнює одиниці. Зокрема, нечітка міра є імовірнісною мірою при $\lambda = 0$.

В залежності від значення параметра λ існують декілька класів нечітких мір [4, 5]:

- суперадитивні – міри довіри ($\lambda \geq 0$), міри необхідності або узгоджені міри довіри ($\lambda \gg 0$), для них виконується $g_\lambda(A \cup B) \geq \max(g_\lambda(A), g_\lambda(B))$ і має місце мультиплікативний ефект;
- субадитивні – міри правдоподібності ($\lambda \in (-1, 0]$), міри можливості ($\lambda = -1$), для них виконується $g_\lambda(A \cup B) \leq \min(g_\lambda(A), g_\lambda(B))$ і має місце ефект заміщення.

Таким чином, використання нечіткої міри представляє єдиний підхід до представлення точних, невизначених, неповних, нечітких значень критеріїв рішень. Імовірнісна міра є частинним випадком міри довіри або міри правдоподібності при $\lambda = 0$ і має місце адитивність суджень. Імовірність можна розглядати як суб'єктивну оцінку експертом появи певної події. Можливість розуміється як відсутність принципових обмежень для того, щоб подія відбулася. Необхідність інтерпретується як наявність обмежень, які гарантують результат. Тому ці нечіткі міри можна використовувати для формалізації таких очікувань експерта як прагматизм, оптимізм і песимізм.

Нечіткий інтеграл Шоке від функції $h: X \rightarrow [0, 1]$ на дискретній множині $A \subseteq X$, $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ за нечіткою мірою g визначається наступним чином [2, 3]:

$$I_{\text{Ш}}(h) = \int_A h(x) \circ g = h(x_n)g(H_n) + \sum_{i=1}^{n-1} (h(x_i) - h(x_{i+1}))g(H_i) = \sum_{i=1}^n h(x_i)(g(H_i) - g(H_{i-1})),$$

де $H_i = \{x_k \mid h(x_k) \geq h(x_i), k = \overline{1, n}\}$, $H_0 = \emptyset$.

Нечіткий інтеграл Сугено від функції $h: X \rightarrow [0, 1]$ на дискретній множині $A \subseteq X$, $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ за нечіткою мірою g визначається наступним чином [4]:

$$I_C(h) = \int_A h(x) \circ g = \max_{i=1, n} (\min(h(x_i), g(H_i))), \text{ де } H_i = \{x_k \mid h(x_k) \geq h(x_i), k = \overline{1, n}\}$$

Для імовірнісної міри ($\lambda = 0$) нечіткий інтеграл еквівалентний адитивній згортці.

Інтеграл Сугено дозволяє вказати ті елементи множини X , що вплинули на результат. Інтеграл Шоке враховує всі елементи множини X .

Таким чином, глобальна вага альтернативи a_i дорівнює $w_i^{\text{глоб}} = I_{\text{Ш}}(h_i)$ або $w_i^{\text{глоб}} = I_C(h_i)$ за нечіткою мірою g , яка виражає ступінь важливості підмножин множини критеріїв C .

Приклад

Розглянемо задачу розподілу ресурсів, в якій інвестор визначає відносну привабливості альтернативних варіантів інвестицій: відкритий пайовий інвестиційний фонд, ПФ (a_1); депозит (a_2); готівка (a_3) згідно з множиною своїх цілей: збереження принципів (c_1); зростання (приріст прибутку) (c_2); мінімізація ризику (c_3); зусилля на управління (c_4). Інвестор попарно порівняв альтернативи відносно кожної цілі і, використовуючи метод головного власного вектору МАІ, були розраховані локальні ваги альтернатив відносно кожної цілі (табл. 1). Крім того, інвестор виразив ступені важливості цілей: $g(\{c_1\}) = 0.1$, $g(\{c_2\}) = 0.5$, $g(\{c_3\}) = g(\{c_4\}) = 0.2$, $g(\{c_1, c_2\}) = 0.5$, $g(\{c_1, c_2, c_3\}) = 0.9$, $g(\{c_2, c_4\}) = 0.6$, $g(\{c_2, c_4, c_1\}) = 0.8$, $g(\{c_1, c_2, c_3, c_4\}) = 1.0$, $g(\{c_1, c_4\}) = 0.2$, $g(\{c_1, c_4, c_3\}) = 0.6$, $g(\{c_3, c_4\}) = 0.5$.

Глобальні ваги альтернатив рішень були розраховані за нечіткими інтегралами та для порівняння – за традиційним дистрибутивним синтезом (лінійна згортка).

Таблиця 1 – Локальні ваги альтернатив відносно цілей та їх глобальні ваги

Альтернативи	Локальні ваги альтернатив				Глобальні ваги альтернатив		
	c_1 (0.1)	c_2 (0.5)	c_3 (0.2)	c_4 (0.2)	Дистриб. синтез	Нечіткий інтеграл Шоке	Нечіткий інтеграл Сугено
a_1	0.090	0.649	0.065	0.114	0.369	0.367	0.500
a_2	0.455	0.279	0.361	0.405	0.338	0.350	0.361
a_3	0.455	0.072	0.574	0.481	0.293	0.333	0.481

Інтегралі Шоке і Сугено можуть також бути використані в задачах групового оцінювання альтернатив для агрегування індивідуальних оцінок експертів, якщо має місце взаємозв'язок між експертами.

Література

1. Панкратова Н.Д., Недашківська Н.І. Моделі і методи аналізу ієрархій: Теорія. Застосування: Навчальний посібник. – К: ІВЦ «Видавництво «Політехніка», 2010. – 371 с.
2. Marichal J.-L. An Axiomatic Approach of the Discrete Choquet Integral as a Tool to Aggregate Interacting Criteria // IEEE TRANSACTIONS ON FUZZY SYSTEMS, . – 2000. - VOL. 8(6). – P. 800 – 807.
3. Chiou H.-K., Tzeng G.-H., Cheng D.-C. Evaluating sustainable fishing development strategies using fuzzy MCDM approach // Omega. –2005.- Vol.33.–P.223– 234.
4. Бочарников В.П. Fuzzy-технология: Математические основы. Практика моделирования в экономике. – Санкт-Петербург: «Наука» РАН, 2001. – 328 с.
5. Яхьяева Г.Э. Нечеткие множества и нейронные сети. – БИНОМ, 2006. – 315.