

УДК 681.3.06

ГРАФОВІ ПЕРЕТВОРЮВАЧІ НА МНОЖИНІ ЗВАЖЕНИХ ГРАФІВ. АЛГЕБРАЇЧНА ХАРАКТЕРИСТИКА

Н.М. Снігур

Національний Технічний Університет України (КПІ)

e-mail: nastena_sss@mail.ru

Формалізація мов програмування є нагальною потребою практики програмування [1]. Основу алгебраїчних методів складають програмні алгебри, тобто алгебри, носіями яких є спеціальні класи функцій, а операціями – композиції, що представляють собою абстракції засобів синтезу програм. Терміни примітивних програмних алгебр (ППА) дозволяють точно ставити та вирішувати проблеми повноти в різних класах обчислюваних функцій

Одним з найважливіших напрямків досліджень в сучасному програмуванні є вивчення методів та створення ефективних засобів специфікації задач та їх рішень. Вивчення відповідних класів маніпуляцій над ієрархічними структурами є досить актуальним. (Див., наприклад, [2-6, 8-10]).

Об'єктом дослідження даної роботи є графові перетворювачі, орієнтовані на множину зважених графів. Усі використані та невизначені в роботі поняття та позначення розуміються в сенсі [7].

Основні поняття

Під (скінченим) графом g будемо розуміти пару $\langle V, E \rangle$, де V – деяка скінчена непуста множина об'єктів (вершин графа), а $E \subset V \times V$ – множина його дуг. Не обмежуючи загальностей, покладемо $V \subset N$. При цьому на множині вершин вводиться цілком природна впорядкованість.

В деяких випадках ребрам графа можуть ставитись у відповідність різні дані - атрибути (мітки). Якщо в якості атрибутів використовуються цілі чи дійсні числа, то такі графи називають зваженими. Фактично, зважений граф являє собою трійку $\langle V, E, c \rangle$, де $c: E \rightarrow Z$ ($c: E \rightarrow R$) – певна функція, визначена на множині дуг графа. Надалі обмежимося простим випадком, коли вага кожної дуги являється натуральним числом, т.б. $c: E \rightarrow N$.

Вершини графа- u, v, w , а дуги – літерами e, p, s , можливо з індексами, $v_1, \dots, e_1, \dots$. У випадку необхідності явно вказати вершини дуги та її напрям, використовуватимемо запис $\langle v, u \rangle$, розуміючи, що дуга направлена від v до u . Будемо називати першою вершиною графа вершину з найменшим номером. Граф будемо позначати або через $g_{|E|}^r$, де r – номер першої вершини графа g , а $|E|$ – кількість його дуг, або скорочено просто g . Щоб зазначити, що дуга e_i має вагу k_i , використовуватимемо запис (e_i, k_i) .

Множину всіх графів позначимо G . Під функціями далі розуміємо часткові функції з аргументами і значеннями із G , а під предикатами – часткові предикати на G .

Обчислюваність на G вводиться як нумераційна обчислюваність (див. [1]), за допомогою арифметичної функції, що представляє дану функцію на G в деякій зафіксованій нумерації α_G множини G [2]. Існування такої нумерації впливає зі зліченості множини N .

Будь-яку частково-рекурсивну багатомісну функцію або будь-який частково-рекурсивний багатомісний предикат (чр-функція, чр-предикат) на G будемо називати

також графовим перетворювачем, або коротко – перетворювачем, коли це не призводить до протиріччя.

Через A_G^{cp} позначимо ППА, носій якої складають графові перетворювачі на G . Породжуючу множину алгебри A_G^{cp} назвемо її повною системою (ПС); ПС ППА – I_m^n базисом, якщо будь-яка її підсистема, що отримується видаленням якого-небудь предиката або якої-небудь функції, відмінної від селекторної, вже не буде повною.

Поняття функції, що зберігає денотати вводиться по аналогії з [1], проте з певним узагальненням. Нехай $\beta: G \rightarrow 2^N$, де 2^N – множина всіх скінчених підмножин N .

Будемо казати, що функція f арності n β -зберігає денотати, якщо існує скінчена множина $V_f \subset N$ така, що для будь-якого $\langle x_1, \dots, x_n \rangle \in \text{dom} f$ виконується

$$\beta(f(\langle x_1, \dots, x_n \rangle)) \subseteq \bigcup_{i=1}^n \beta(x_i) \cup V_f.$$

У випадку графів функція β є ніщо інше, як виділення множини вершин графа, тобто для $g = \langle V, E \rangle$ будемо мати $\beta(g) = V$.

Через $A_{G,\beta}^{cp}$ позначимо ППА, носій якої складають перетворювачі на G , які β -зберігають денотати. Визначення породжуючої множини, повної системи та базиса – такі самі як і у випадку A_G^{cp} .

При знаходженні повних систем ППА є корисними певні необхідні умови повноти, які тут наведемо у вигляді тверджень.

Твердження 1. Будь-яка повна система ППА для довільної множини L містить хоча б одну функцію, яка не зберігає L .

Твердження 2. Будь-яка повна система ППА класу функцій, які не зберігають денотати, містить хоча б одну функцію, яка не зберігає денотати.

Нарешті в якості сигнатури ППА візьмемо сукупність $\Omega = \{\circ, \diamond, *^{(n+1)}\}$, де $\circ$ – операція суперпозиції, $\diamond$ – операція розгалуження, а $*^{(n+1)}$ – так зване $(n+1)$ -арне циклування (визначення див. в [15]).

$$\text{Розглянемо } g = \langle V = \{v_1, \dots, v_n\}, E = \{ \langle \langle v_{i_1}, v_{i_2} \rangle, k_1 \rangle, \langle \langle v_{i_3}, v_{i_4} \rangle, k_2 \rangle, \dots \} \rangle,$$

$1 \leq i_j \leq n$, $j=1,2,\dots$, де $k_1, k_2, \dots$ – ваги дуг графа. Для подальшого викладення отриманих результатів буде доречним домовитись про певну впорядкованість дуг графа, тобто іншими словами про впорядкованість пар натуральних чисел¹. Зауважимо, що порядок на множині N^2 можна вводити по-різному², проте в даному випадку більш зручним нам видається наступний:

$$\langle 0,0 \rangle < \langle 0,1 \rangle < \langle 0,2 \rangle < \dots < \langle 0,n \rangle < \dots < \langle 1,0 \rangle < \langle 1,1 \rangle < \dots < \langle 2,0 \rangle < \langle 2,1 \rangle < \dots \quad (1)$$

Тоді, дуги графа занумеруємо відповідно порядку (1), т. б., першою дугою буде дуга, що відповідає найменшій парі в цьому порядку (найлівішій), а найбільший номер матиме дуга, що відповідає найбільшій парі (найправішій).

Об'єднання графів $\hat{\cup}$ визначимо так. Нехай $g_1 = \langle V_1, E_1, c_1 \rangle$, $g_2 = \langle V_2, E_2, c_2 \rangle$, $g_1 \hat{\cup} g_2 = \langle V_1 \cup V_2, E_1 \cup E_2, c \rangle$, де $c(e) = c_1(e)$, якщо $e \in E_1, e \notin E_2$, $c(e) = c_2(e)$, якщо $e \notin E_1, e \in E_2$ та $c(e) = c_1(e) + c_2(e)$, якщо $e \in E_1, e \in E_2$.

¹ Такий крок є цілком природним, оскільки множина N^2 , як відомо є ефективно зліченою.

² Наприклад, як в канторівській нумерації (див., [1, стр. 60]).

Різницею графів $\setminus$ вважатимемо таку функцію. Для $g_1 = \langle V_1, E_1, c_1 \rangle$ та $g_2 = \langle V_2, E_2, c_2 \rangle$, позначимо $g_1 \setminus g_2 = \langle V, E, c \rangle$, де $E = \{e \text{ такі, що } e \in E_1, e \notin E_2, c(e) = c_1(e) \text{ або } e \in E_1, e \in E_2, c(e) = c_1(e) - c_2(e) > 0\}$.

Виділення «першої» дуги E_e так, що для $g = \langle \{v_1, \dots\}, \{\langle v_1, v_{i_1} \rangle, k_1 \rangle, \dots \rangle\rangle$, $E_e(g) = \langle \langle v_1, v_{i_1} \rangle, k_1 \rangle$.

Виділення «першої» вершини E_v : для $g = \langle V = \{v_1, \dots\}, E \rangle$, $E_v(g) = \langle \{v_1\}, \emptyset \rangle$. (Функції видалення отримуються, очевидно, за допомогою щойно визначених функцій виділення та різниці графів).

Також розглянемо наступні графові перетворювачі: D_v - видалення першої вершини, якщо вона ізольована; константна функція $C_0^G(g) = g_0^1$; видалення всіх дуг графа $\overset{\circ}{D}_e(\pi) = (E_e(\pi) \neq \Delta) * \langle D_e(\pi) \rangle$; функція генерації порожнього графа $C_{\Delta_G}(g) = \Delta_G$; S_G - збільшення на одиницю номера першої вершини, а саме, для $g = \langle V = \{v_1, v_2, \dots\}, E \rangle$, $S_G(g) = \langle V, E_1 \rangle$, де $E_1 = E \setminus \{ \langle v_1, v_j \rangle \mid \langle v_1, v_j \rangle \in E \} \cup E_2$ та $E_2 \equiv \{ \langle v_1 + 1, v_j \rangle \mid \langle v_1, v_j \rangle \in E \}$; D_e - зменшення на одиницю ваги «першої» дуги графа $g = \langle V, E \rangle$, причому якщо вага дорівнює одиниці, то дуга видаляється повністю. Формально, нехай $g = \langle \{v_1, \dots\}, \{\langle v_1, v_{i_1} \rangle, k_1 \rangle, \dots \rangle\rangle$, тоді $D_e(g) = \langle \{v_1, \dots\}, \{\langle v_1, v_{i_1} \rangle, k_1 - 1 \rangle, \dots \rangle\rangle$, якщо $k_1 > 1$ та $D_e(g) = \langle \{v_1, \dots\}, \{\langle e_2, k_2 \rangle, \dots \rangle\rangle$, якщо $k_1 = 1$.

Нарешті знадобиться ще часткова функція L , що діє на множині із двох нульових графів $\{m\}$ та $\{n\}$ таким чином, що $L(\{m\}, \{n\}) = \langle \{m, n\}, \{\langle m, n \rangle\} \rangle$ - створення дуги.

Можна безпосередньо перевірити, що всі ці функції є частково-рекурсивними.

Покладемо

$$\sigma_G := \{C_0^G, S_G, \hat{\cup}, \setminus, E_e, E_v, D_v, L, =_G, I_m^n\}_{m=1, n}^{n=1, 2, \dots}.$$

та

$$\sigma_{G, \beta} := \{C_0^G, \hat{\cup}, \setminus, E_e, E_v, D_v, L, =_G, I_m^n\}_{m=1, n}^{n=1, 2, \dots}.$$

Доведення.

Той факт, що σ_G ($\sigma_{G, \beta}$) є породжуючою множиною A_G^{cp} ($A_{G, \beta}^{cp}$) впливає безпосередньо із доведених вище результатів.

Для остаточного доведення теореми досить показати, що видалити жодну із функцій σ_G ($\sigma_{G, \beta}$) неможливо. Для цього використаємо Твердження 1 та 2:

1. $=_G$ є єдиним предикатом множини;
2. лише функція C_0^G не зберігає множину графів $G \setminus \{g = \langle V, E \rangle \mid V = \{v_1, \dots\}, v_1 = 1\}$ (множина графів, у яких номер першої вершини більше 1);
3. лише функція $\hat{\cup}$ не зберігає множину $\{g = \langle V, E \rangle \mid |V| \leq 2\}$ (графи з кількістю вершин меншою або рівною 2);
4. лише функція $\setminus$ не зберігає множину $G \setminus \{g = \langle V, \emptyset \rangle \mid |V| \geq 2\}$ (усі графи, окрім тих, що є повністю незв'язними і мають більше однієї вершини);
5. лише E_e не зберігає $G \setminus \{g = \langle \{1, 2\}, \{\langle 1, 2 \rangle\} \rangle\} \cup \{g = \langle \{v_1, \dots\}, E \rangle \mid v_1 = 2\} \cup \{g = \langle \{1, 2\}, \Pi \rangle\}$

(усі графи, окрім таких: графа, що складається із дуги $\langle 1,2 \rangle$; незв'язного графа, що складається із двох вершин з номерами 1 та 2; множини графів, для яких номер першої вершини дорівнює 2);

6. лише E_v не зберігає $G \setminus (\{g = \langle \{2\}, \Pi \rangle\} \cup \{g = \langle \{1,2\}, \Pi \rangle\} \cup \{g = \langle V, \{e_1, \dots\} \mid e_1 = \langle 1,2 \rangle\})$ (усі графи, окрім таких: графа з однієї вершини з номером 2; графа із двох вершин з номерами 1 та 2; множини графів, у яких першим ребром є $\langle 1,2 \rangle$);

7. лише D_v не зберігає $\{g = \langle \{v_1, \dots\}, E \rangle \mid v_1 = 1\} \cup \Delta_G$ (множина графів, для яких номер першої вершини дорівнює 1, та порожній граф);

8. нарешті, лише L не зберігає множину $\{g = \langle V, \emptyset \rangle\} \cup \Delta_G$ (множина усіх повністю незв'язних графів та порожній граф).

Також у випадку A_G^{cp} лише функція $S_G \in \sigma_G$ не зберігає денотати.

Таким чином, доведено, що сукупність σ_G ($\sigma_{G,\beta}$) є породжуючою множиною A_G^{cp} ($A_{G,\beta}^{cp}$).

Проведене в роботі дослідження створює адекватне підґрунття для пошуку нових рішень в напрямку дослідження складних структур організації інформації та методів маніпулювання ними. Тобто, дослідження репрезентативних класів графових перетворювачів, отримання відповідних алгебраїчних характеристик та визначення базисів в рамках ППА є необхідним для вивчення методів та створення ефективних засобів специфікації задач та їх рішень (наприклад, UML, BPWin, ERWin і т.п.). Зокрема, отримані результати дозволяють поглянути з єдиних позицій на існуючих сьогодні методів та засобів специфікації задач (наприклад, в UML, BPWin, ERWin і т.п.).

Література

1. Басараб І.А. Базы данных с логико-функциональной точки зрения / І.А. Басараб, В.Н. Редько // Программирование. — 1984. — № 2. — С. 53–67
2. Снигур Н.Н. Алгебраическая характеристика класса частично-рекурсивных графовых функций. //Реєстрація, зберігання і обробка даних.- Київ, 2009. -Т.12, №4. - С. 25–32.
3. Мальцев А.И. Алгоритмы и рекурсивные функции. — М.: Наука, 1965. — 391 с
4. Пролубников А.В. Прямой алгоритм проверки изоморфизма графов // Сб. научн. тр. "Компьютерная оптика". Под ред. акад. РАН Ю.И. Журавлева. Издательство Самарского государственного университета, 2007. Вып. 27. С. 123-128.
5. Foggia P.A Database of graphs for isomorphism and sub-graph isomorphism benchmarking / Foggia P., Sansone C., Vento M. A // Proc. of the 3rd IAPR TC-15 international workshop on graph-based representations, Italy, 2001, p. 157-168.
6. Spence E. The Strongly Regular (40, 12, 2,4) Graphs // The Electronical Journal Of Combinatorics. Vol 7(1), 2000.
7. Буй Д.Б. Примитивные программные алгебры: Автореф. дис. канд. физ.-мат. наук. — Киев, 1985. — 22с.
8. Буй Д.Б., Редько В.Н. Примитивные программные алгебры. I, II // Кибернетика. — 1984. — №5. — С. 1–7; — 1985. — №1. — С.28–33.
9. Снигур Н.Н. Алгебраическая характеристика класса частично-рекурсивных графовых функций.//Реєстрація, зберігання і обробка даних.—Київ, 2009. —С. 25–32.
10. Мальцев А.И. Конструктивные алгебры. I // Успехи мат. наук. — 1961. — 16, №3. —С. 3–60.