

УДК 519.2+600.1

ОБРАЗОВАНИЕ СТАТИСТИЧЕСКИ НЕУСТОЙЧИВЫХ ПРОЦЕССОВ

И.И. Горбань

Институт проблем математических машин и систем НАН Украины

e-mail: igor.gorban@yahoo.com

1. Введение

В системах поддержки принятия решения используются различные математические модели. Значительную их часть составляют стохастические модели, основанные на предположении о существовании идеальной статистической устойчивости реальных процессов.

До недавнего времени понятие статистической устойчивости, как ни странно, не было формализовано. Сделать это можно по-разному. В статье [1] предложены несколько вариантов определения понятия статистической устойчивости.

Применительно к последовательности случайных величин под статистической устойчивостью в узком смысле можно подразумевать сходимость эмпирической (выборочной) функции распределения рассматриваемой последовательности, а под статистической устойчивостью в широком смысле – сходимость математического ожидания выборочной дисперсии флуктуации выборочного среднего и сходимость математического ожидания выборочной дисперсии выборочного среднеквадратического отклонения (СКО) или выборочной дисперсии.

Таким образом, статистическая устойчивость в широком смысле требует наличия сходимости одновременно выборочного среднего последовательности и ее выборочного СКО (или дисперсии). Отсутствие сходимости одной из этих величин или обеих вместе означает нарушение статистической устойчивости. Обратим внимание, что понятие статистической устойчивости в широком смысле допускает обобщение [1] и на случай неслучайных последовательностей, не имеющих вероятностной меры.

Многочисленные исследования разнообразных процессов на больших интервалах наблюдения привели к пониманию [2], что в реальном мире нет идеально статистически устойчивых процессов. Все реальные процессы статистически неустойчивы. Однако, нарушения статистической устойчивости значимы, как правило, лишь при достаточно больших интервалах наблюдения. У разных типов процессов интервал, на котором начинают проявляться эти нарушения, и степень нарушений разные.

Среди процессов встречаются как процессы, у которых нарушение статистической устойчивости наблюдаются уже при длине выборки, составляющей несколько десятков независимых отсчетов, так и процессы, у которых такое нарушение происходит лишь при длине выборки в десятки тысяч и более независимых отсчетов. Как правило, социальные процессы значительно менее устойчивы, чем физические.

Заметим, что в большинстве случаев нарушение статистической устойчивости фиксируются уже на уровне выборочного среднего.

При нарушении статистической устойчивости стохастические модели перестают адекватно описывать реалии. Для их описания необходимы другие модели, учитывающие ограниченный характер статистической устойчивости явлений. Таковыми являются, в частности, гиперслучайные модели [2].

Долгое время оставались неясными причины нарушения статистической устойчивости реальных процессов. Положительные сдвиги в понимании наметились после установления связи между статистической устойчивостью процесса и его спектром [3]. Выяснилось, что многие хорошо известные процессы, в частности фликкер-шум, неравновесные процессы и некоторые цветные шумы, оказываются статистически неустойчивыми.

Целью настоящего доклада является освещение ключевых моментов, касающихся связи статистической устойчивости процесса с его спектром, и рассмотрение путей образования статистической неустойчивых процессов.

2. Статистически неустойчивые процессы

Учитывая, что нарушения статистической устойчивости наблюдаются обычно уже на уровне выборочного среднего, в дальнейшем случайный процесс $X(t)$ будем считать статистически устойчивым, если параметр статистической неустойчивости $\gamma_T = M[\bar{D}_{Y_T}] / \bar{D}_{x_T}$ стремится к нулю при $T \rightarrow \infty$, где $M[\cdot]$ – оператор математического ожидания, $\bar{D}_{x_T} = \frac{1}{T} \int_0^T D_x(t) dt$ – средняя на интервале времени наблюдения $[0, T]$ дисперсия процесса $X(t)$, $D_x(t) = M[(X(t) - m_x(t))^2]$ – дисперсия процесса $X(t)$, $m_x(t) = M[X(t)]$ – математическое ожидание процесса $X(t)$.

Установлено [3], что при большом T параметр статистической неустойчивости γ_T определяется спектральной плотностью мощности (СПМ) $S_{x_T}^\circ(f)$ соответствующего центрированного процесса $X_T(t)$. При этом его предельное значение

$$\gamma = \lim_{T \rightarrow \infty} \gamma_T = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{\int_{1/T}^T \frac{\ln^2 f T}{f^2} S_{x_T}^\circ(f) df}{4\pi^2 T^2 \int_{1/T}^T S_{x_T}^\circ(f) df}.$$

Если $\lim_{T \rightarrow \infty} \gamma_T \neq 0$ (или на практике отсутствует тенденция стремления параметра статистической неустойчивости к нулю), то рассматриваемый процесс $X(t)$ – статистически неустойчивый.

3. Процессы со степенной СПМ

СПМ $S_{x_T}^\circ(f)$ многих процессов описывается степенной функцией вида $1/f^\beta$, где β – показатель формы. Такую СПМ имеет равновесный фликкер-шум с параметром β , удовлетворяющим неравенству $0 < \beta < 1$, неравновесный фликкер-шум с параметром $\beta \geq 1$, цветные шумы (фиолетовый ($\beta = -2$), синий ($\beta = -1$), белый ($\beta = 0$), розовый ($\beta = 1$), коричневый ($\beta = 2$), черный ($\beta > 2$)), фрактальные (самоподобные) шумы с положительной (персистентные, $0 < \beta < 1$) и отрицательной (антиперсистентные, $-1 < \beta < 0$) корреляцией отсчетов и др.

Для процесса со степенной СПМ предельное значение параметра статистической неустойчивости

$$\gamma = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{\int_{1/T}^T \frac{\ln^2 f T}{f^{\beta+2}} df}{4\pi^2 T^2 \int_{1/T}^T f^{-\beta} df}.$$

Исследования показали [3], что процессы с параметром $\beta < 1$ статистически устойчивы, процессы же с параметром $\beta \geq 1$ – статистически неустойчивы (рис. 1).



Рис. 1. Процессы со степенной СПМ

Как известно, корреляционная функция (КФ) $K_x(\tau)$ стационарного процесса $X(t)$ и его СПМ $S_x(f)$ связаны между собой интегральным преобразованием Винера – Хинчина. Однако [3] существуют процессы со СПМ $S_x(f)$, не имеющие определенной КФ $K_x(\tau)$, и, наоборот, существуют случайные процессы с КФ $K_x(\tau)$, не имеющие определенной СПМ $S_x(f)$.

Отсутствие КФ вида $K_x(\tau)$ или СПМ вида $S_x(f)$ означает, что рассматриваемый процесс нестационарен. Процесс со степенной СПМ является стационарным, когда параметр $\beta \in [0,1)$ [3]. Процессы с параметром $\beta < 0$ и $\beta \geq 1$ – нестационарны.

Из сказанного следует, что статистически неустойчивые процессы со степенной СПМ (у которых параметр $\beta \geq 1$) относятся к классу нестационарных процессов. Обратим внимание, что к этому же классу относятся не только статистически неустойчивые, но также и статистически устойчивые процессы, у которых параметр $\beta < 0$ (рис. 1).

4. Источники статистической неустойчивости

Одной из разновидностей статистически неустойчивых процессов является неравновесный фликкер-шум, СПМ которого описывается зависимостью $1/f^\beta$ с параметром $\beta \geq 1$. Это чрезвычайно распространенный шум. Он фиксируется в металлах, полуметаллах, полупроводниках, газах, жидкостях, электролитах, радиоэлектронных устройствах, однородных и неоднородных проводниках при высокой и низкой температурах, пленках и контактах, различных живых и неживых объектах и т.д. Фликкер-шум фиксируется во всех открытых системах.

Многие годы ученые пытались выяснить причины возникновения неравновесного фликкер-шума. Его исследованию посвящено множество работ, статей, монографий, специализированных научных конференций, десятки обзоров (см., например, [4]).

Несмотря на масштабность проведенных исследований, до сих пор нет единого мнения по поводу того, что является источником фликкер-шума. По всей видимости, фликкер-шумы вызываются множеством различных факторов.

Приток в открытую систему извне материи, энергии и (или) информации, служащий источником неравновесных процессов, – важный, но не единственный фактор, обуславливающий формирование статистически неустойчивых шумов. Такие шумовы могут возникнуть в результате различных нелинейных преобразований. При детектировании, например, амплитудно-модулированного сигнала в его спектре появляются спектральные составляющие, соответствующие огибающей радиосигнала. Если спектр огибающей описывается функцией типа $1/f^\beta$, где $\beta \geq 1$, то после подавления высокочастотной несущей процесс оказывается статистически неустойчивым.

Обратим особое внимание на то, что широкополосный статистически устойчивый шум при линейной низкочастотной фильтрации может стать статистически неустойчивым.

Характерный пример такой фильтрации – интегрирование. При интегрировании процесса $X(t)$ получается процесс $Y(t)$, СПМ $S_y(f)$ которого связана со СПМ $S_x(f)$ исходного процесса соотношением $S_y(f) = S_x(f)/(4\pi^2 f^2)$ [5]. Такая зависимость приводит к тому, что широко распространенные *стационарные статистически устойчивые шумовы, соответствующие диапазону от белого включительно до розового, после интегрирования становятся нестационарными статистически неустойчивыми и располагаются в коричнево-черной области* (см. рис. 1).

5. Выводы

1. Отсутствие у случайного процесса корреляционной функции вида $K_x(\tau)$ или спектральной плотности мощности вида $S_x(f)$ свидетельствует, что рассматриваемый процесс нестационарный.
2. Статистически неустойчивые процессы со степенной спектральной плотностью мощности нестационарны.
3. Существует множество факторов, способствующих формированию статистически неустойчивых процессов. Это и приток в открытую систему извне материи, энергии и (или) информации, служащий источником неравновесных процессов, и различные нелинейные преобразования, и линейная фильтрация процессов, и др.
4. Существенно, что широкополосный стационарный статистически устойчивый шум в результате линейной низкочастотной фильтрации может трансформироваться в статистически неустойчивый нестационарный процесс.

Список литературы

1. Горбань И.И. Критерии и параметры статистической неустойчивости / И.И. Горбань // Математические машины и системы. – 2012. – №4. – С. 106 – 114.
2. Горбань И.И. Теория гиперслучайных явлений: физические и математические основы. – К.: Наукова думка, 2011. – 320 с. – ISBN 978-966-00-1093-2. – http://www.immsp.kiev.ua/perspages/gorban_i_i/index.html.
3. Горбань И.И. Статистически неустойчивые процессы: связь с фликкер, неравновесными, фрактальными и цветными шумами / И.И. Горбань // Известия вузов. Радиоэлектроника. – 2012. – Т. 55, № 3. – С. 3 – 18.
4. Коган Ш.М. Низкочастотный токовый шум со спектром типа $1/f$ в твердых телах // Успехи физических наук, 1985. – Т. 145, вып. 2, с. 285-325.
5. Зиновьев А.Л., Филиппов Л.И. Введение в теорию сигналов и цепей. М.: Высшая школа, 1975. – 263 с.