АНАЛИТИЧЕСКОЕ ОПИСАНИЕ ПРОСТРАНСТВЕННОГО ОБЪЕКТА

Т.М. Власова, В.Г. Калмыков
Институт проблем математических машин и систем НАН Украины
e-mail: chery@immsp.kiev.ua

Введение

В настоящей работе рассматривается метод аналитического описания пространственного объекта для использования в системах автоматической/автоматизированной обработки пространственных объектов с учетом их внутреннего содержимого, что позволит повысить качество принятия решений по этим объектам. Такое аналитическое представление пространственных объектов сплайнами позволяет компактно сохранять характеристики этих объектов. Существуют области деятельности, где необходимо описывать пространственный объект вместе с распределенными параметрами материала, образующего этот пространственный объект, либо иными параметрами, представляющими интерес. К таким объектам относятся, например, биологические препараты, объекты геофизических исследований.

Модель пространственного объекта

Рассмотрим построение модели пространственного объекта, внутреннее содержимое которого описывается функцией $p(x,y,z)$.

В данной задаче требуется найти некоторую пространственную функцию $f(x,y,z)$; $0 \le x \le X$; $0 \le y \le Y$; $0 \le z \le Z$ приемлемым образом аппроксимирующую параметр $p(x_l,y_m,z_n)$, измеренный на множестве $\{x_l,y_m,z_n\}$; $0 \le l \le L$; $0 \le m \le M$; $0 \le n \le N$ точек, принадлежащих объекту, где l,m,n – натуральные числа. Предполагается, что функция $p(x,y,z)$ является непрерывной и гладкой.

Построение модели объекта заключается в следующем.

1. Для определенности и без ограничения общности рассмотрим значения параметра $p(x_l,y_m,z_n)$ на множестве $\{0 \le n \le N\}$ при l=const, m=const. В соответствии работой [1,2] такому множеству точек, которое расположено вдоль оси Oz рассматриваемого объекта можно поставить в соответствие последовательность значений $p(x_l,y_m,z_n)$, $\{0 \le n \le N\}$ при m=const, l=const, которые отображают зависимость параметра от координаты Oz. Эта последовательность может быть аппроксимирована аналитической параметрической полиномиальной кривой. Для большинства практических случаев третий порядок полиномов является достаточным. В настоящей работе используется канонический сплайн (cardinal spline):

$$\begin{aligned} p(t) &= a_p t^3 + b_p t^2 + c_p t + d_p \\ z(t) &= a_z t^3 + b_z t^2 + c_z t + d_z \end{aligned} \qquad (1)$$

где параметр t изменяется от 0 до 1.

Коэффициенты полиномов вычисляются как:

$$\begin{aligned} &a_p = T(p_2 - p_0) + T(p_3 - p_1) + 2p_1 - 2p_2; \quad a_z = T(z_2 - z_0) + T(z_3 - z_1) + 2z_1 - 2z_2; \\ &b_p = -2T(p_2 - p_0) - T(p_3 - p_1) - 3p_1 + 3p_2; \quad a_z = T(z_2 - z_0) + T(z_3 - z_1) + 2z_1 - 2z_2; \\ &c_p = T(p_2 - p_0); c_z = T(z_2 - z_0); d_p = p_1; d_z = z_1; \end{aligned} \qquad (2)$$

где T – «натяжение» (при T = 0 – получаем прямую линию, при увеличении T изгиб кривой возрастает, при T больше 1 или меньше 0 кривая может принять вид петли), а точки (p_0,z_0), (p_1,z_1), (p_2,z_2), которые вычисляются в процессе оптимизации, определяют форму аппроксимирующей кривой. Имеется в виду простейший случай, когда достаточно трех управляющих точек.

Таким образом, для каждого значения x_l, y_m; $0 \le l \le L$; $0 \le m \le M$; значения параметра вдоль оси *Oz* (столбец) полностью определяются вектором управляющих точек сплайна $v(l,m) = \{p_0, z_0, p_1, z_1, p_2, z_2\}_{l,m}$, компоненты которого определяют коэффициенты полиномов канонического сплайна рис.1b.

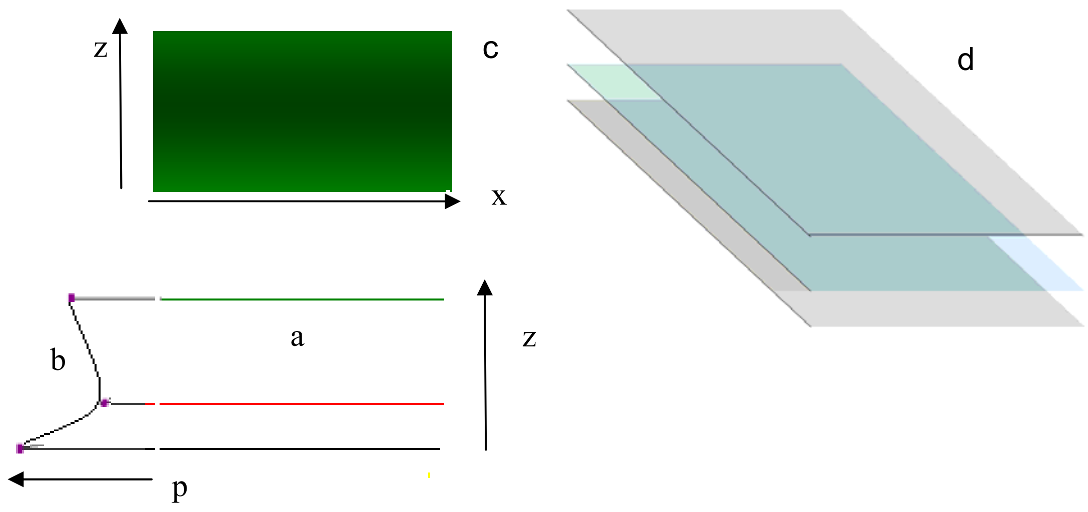

Рис. 1. Вычисление характеристик точек вертикали (столбца) пространственного объекта для построения его сечения:
а) следы всех трех поверхностей в результате сечения их плоскостью, параллельной xOz (y=1); **b)** чертеж канонической кривой, используемой для вычисления характеристик точек первой вертикали, принадлежащей сечению пространственного объекта; **c)** с помощью уровня яркости представляются параметры всех точек сечения пространственного объекта; **d)** поверхности, описывающие пространственный объект, не пересекаются

2. Рассмотрим множество векторов $\{v(l,m)\}$ при $0 \le l \le L$; m=const. То есть множество всех векторов, расположенных вдоль оси *Ox*, при некотором фиксированном значении y_m. Отметим, что в пространстве *Opxz* все аппроксимирующие кривые, представленные полиномами $\{v(l,m)\}$ при $0 \le l \le L$; m=const, принадлежат некоторой непрерывной и гладкой поверхности $V(m)$, поскольку функция параметра является непрерывной и гладкой по определению (сечение).

Но тогда множество управляющих точек $\{p_0, z_0\}$, при $0 \le l \le L$; m=const принадлежит некоторой пространственной кривой S_0, расположенной на поверхности $V(m)$. Точно так же множества управляющих точек $\{p_1, z_1\}, \{p_2, z_2\}$, при $0 \le l \le L$; m=const, принадлежат соответственно пространственным кривым S_1, S_2, расположенным на поверхности $V(m)$. Эти пространственные кривые могут быть аппроксимированы, так же как и в п.1, пространственными параметрическими кубическими сплайнами. Каждый из сплайнов, так же как и в п.1, определяется тремя управляющими точками, но в пространстве *Opxz*.

$$
\begin{aligned}
\mathrm{S}_0(m) &= \{p_{00}, z_{00}, x_{00}; p_{01}, z_{01}, x_{01}; p_{02}, z_{02}, x_{02}\}_m \\
\mathrm{S}_0(m) &= \{p_{00}, z_{00}, x_{00}; p_{01}, z_{01}, x_{01}; p_{02}, z_{02}, x_{02}\}_m \qquad (3) \\
\mathrm{S}_0(m) &= \{p_{00}, z_{00}, x_{00}; p_{01}, z_{01}, x_{01}; p_{02}, z_{02}, x_{02}\}_m
\end{aligned}
$$

Таким образом, поверхность $V(m)$ (сечение – рис.2) в пространстве *Opxz* может быть описана 9-ю пространственными управляющими точками. Будем называть их управляющими точками второго порядка..

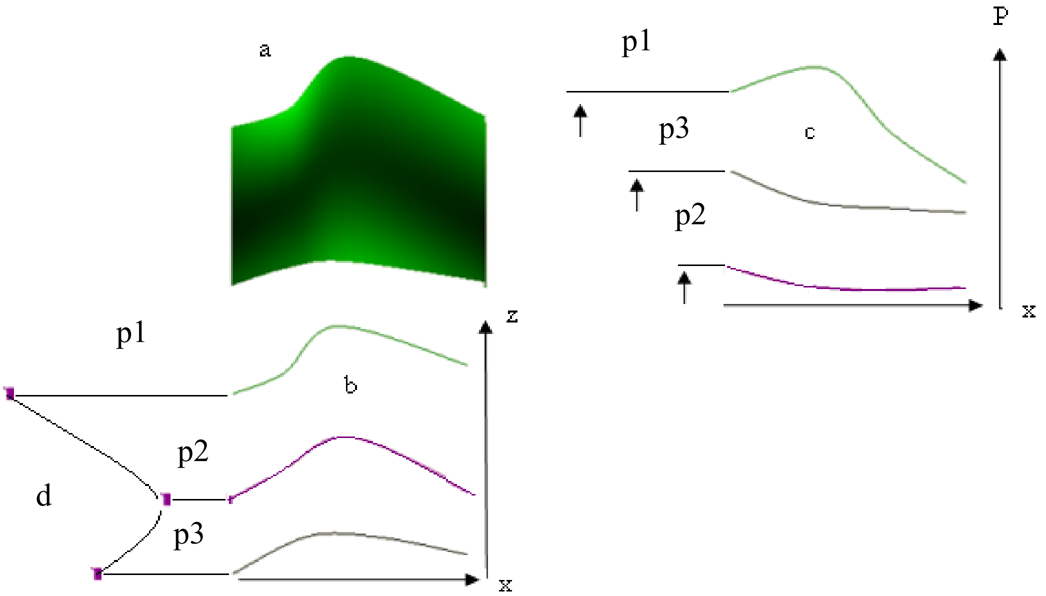

Рис. 2. Изображение сечения пространственного объекта, составленного из столбцов сечения: **a)** с помощью уровня яркости отображаются параметры всех точек сечения объекта; **b)** следы трех управляющих поверхностей формы в результате сечения их плоскостью, параллельной xOz; **c)** следы трех управляющих поверхностей параметра в результате сечения их плоскостью, параллельной xOp; **d)** график канонической кривой, соответствующей значениям параметра всех точек первого столбца, принадлежащего сечению пространственного объекта

3. Рассмотрим множество поверхностей $V(m)$ в пространстве $Opxyz$ при $0 \le m \le M$, причем каждая из поверхностей задана тремя пространственными кривыми $S_0(m)$, $S_1(m)$, $S_2(m)$, а каждая из кривых, в свою очередь, задана тремя пространственными управляющими точками (3). Вследствие непрерывности и гладкости функции $p(x,y,z)$ множество управляющих точек $\{p_{00},z_{00},x_{00}\}$, при $0 \le m \le M$; принадлежит некоторой пространственной кривой U_{00}, расположенной в рассматриваемом объеме. Точно так же множества управляющих точек $\{p_{01},z_{01},x_{01}\},\{p_{02},z_{02},x_{02}\},\ldots,\{p_{22},z_{22},x_{22}\}$ при $0 \le m \le M$; (всего 9 множеств) принадлежат соответственно 9 пространственным кривым U_{01}, $U_{02},\ldots,U_{22}$ расположенным в рассматриваемом объеме. Эти пространственные кривые, в свою очередь, могут быть аппроксимированы, так же как и в п.1, пространственными параметрическими кубическими сплайнами. Каждый из сплайнов, так же как и в п.1, определяется тремя управляющими точками, но в пространстве $Opxyz$.

$U_{000} = \{p_{000},z_{000},x_{000},y_{000};\ p_{001},z_{001},x_{001},y_{001};\ p_{002},z_{002},x_{002},y_{002};\ \}$

….

$U_{020} = \{p_{020},z_{020},x_{020},y_{020};\ p_{021},z_{021},x_{021},y_{021};\ p_{022},z_{022},x_{022},y_{022};\ \}$

…

$U_{220} = \{p_{220},z_{220},x_{220},y_{220};\ p_{221},z_{221},x_{221},y_{221};\ p_{222},z_{222},x_{222},y_{222};\ \}$

Распределение параметра $p(x,y,z)$ в объеме (пространстве) $Opxyz$ может быть описано 27-ю пространственными управляющими точками. Будем называть их управляющими точками третьего порядка.

Предложенное аналитическое представление пространственных объектов инвариантно к некоторым аффинным преобразованиям, что существенно упрощает обработку таких объектов. Предлагаемый метод позволяет определить величину параметра в любой точке пространственного объекта по его описанию.

Количество управляющих точек, равное трем, принято для простоты изложения. Для более сложных рассматриваемых объектов количество управляющих точек может быть выбрано большим и соответствовать сложности рассматриваемого объекта.

Пространственный объект с распределенным параметром можно представить двумя его трехмерными проекциями из четырехмерного пространства *Oxyzp* в двух трехмерных подпространствах, образованных осями координат *Oxyz* (проекция формы) и *Oxyp* (проекция параметра).

Объект может быть описан несколькими фрагментами поверхностей [3]. Для простоты изложения будем считать, что для описания достаточно трех фрагментов поверхностей. Каждый из этих трех фрагментов может быть определен парой управляющих поверхностей – управляющей поверхностью формы и управляющей поверхностью параметра. Управляющая поверхность формы является проекцией пространственного объекта в трехмерном подпространстве, образованном осями координат *Oxyz*, а управляющая поверхность параметра – проекцией в трехмерном подпространстве, образованном осями координат *Oxyp*. При этом управляющие поверхности формы, и связанные с ними управляющие поверхности параметра являются ограниченными равными контурами кусками некоторых регулярных поверхностей.

Моделирование

Предложенный метод кодирования программно промоделирован.

Программа, реализующая описанный алгоритм, позволяет изменить любую управляющую поверхность, что дает возможность получить описание нового пространственного объекта.

Возможна визуализация любого сечения пространственного объекта, как вертикального, так и горизонтального, а также визуализация управляющих поверхностей формы и параметра.

Предложенное аналитическое представление пространственных объектов инвариантно к некоторым аффинным преобразованиям, что существенно упрощает обработку таких объектов. Разработанная программа позволяет определить величину параметра в любой точке пространственного объекта.

Предложенный алгоритм может быть использован при кодировании каноническими сплайнами вертикальных сечений пространственного объекта.

Заключение

Предложен метод аналитического описания пространственного объекта при условии, что распределение параметра внутреннего содержимого объекта может быть представлено непрерывной гладкой функцией.

Предложенный метод программно промоделирован.

Метод может быть использован при разработке средств автоматической/автоматизированной обработки и принятия решения о пространственных объектов с учетом их внутреннего содержимого.

Список литературы

1. Кодирование объекта полутонового изображения с использованием канонических сплайнов / Т.М. Власова, В.В. Вишневский, В.Г. Калмыков [и др.] // Управляющие системы и машины. – 2012. – № 1. – С. 21 – 25.

2. V. Vishnevskey, V. Kalmykov, T. Romanenko Approximation of experimental data by Bezier curves // International Journal “Information theories & applications”. – 2008. – Vol. 15, N 3. – P. 235.

3. Власова Т.М., Калмыков В.Г., Романенко Т.Н. Кодирование фрагмента полутонового изображения на регулярной поверхности // Математичні машини і системи. - Киев. - 2014. - №4. - С. 79-85.