УДК 681.3

ИНТЕРВАЛЬНАЯ МОДЕЛЬ ПРИНЯТИЯ КОЛЛЕКТИВНОГО РЕШЕНИЯ В УСЛОВИЯХ РИСКА

Л.С. Файнзильберг*, О.А. Жуковская**
*МНУЦ ИТИС, **НТТУ КПИ
e-mail: fainzilberg@svitonline.com

В работе [1] предложены формальные модели построения коллективного решения группы независимых экспертов в условиях противоречий, основанные использовании байесовских механизмов. Однако эти модели предполагают априорные знания о вероятностях ошибок экспертов, которые часто отсутствуют при решении практических задач.

Развитие математических методов интервального анализа [2] открывает возможность обобщения байесовского подхода к построению моделей коллективных решений на основе перехода от точечных оценок вероятностных характеристик к доверительным интервалам.

Постановка задачи. Пусть некоторый объект находится в одном из двух возможных состояний V_1, V_2, переходя случайным образом из одного состояния в другое с априорными вероятностями $P(V_1)$, $P(V_2) = 1 - P(V_1)$. Два эксперта A_1, A_2, используя независимые данные, принимают решения δ_i о текущем состоянии объекта в виде индикаторных функций

$$\delta_i = k \text{, если } A_i \text{ решает в пользу } V_k, \quad i = 1,2, \; k = 1,2. \tag{1}$$

Очевидно, что множество возможных ситуаций состоит из четырех комбинаций частных решений (1), причем только в двух случаях эти решения согласованы (когда эксперты принимают одинаковые решения), а в двух остальных – решения противоречивы:

$$\begin{aligned} &S_{12} : (\delta_1 = 1) \wedge (\delta_2 = 2); \\ &S_{21} : (\delta_1 = 2) \wedge (\delta_2 = 1). \end{aligned} \tag{2}$$

Допустим, что по репрезентативной выборке из n наблюдений с известными состояниями объекта оценены частоты ошибок экспертов

$$P^*_{A_i} = \frac{E_{A_i}}{n}, \; i = 1,2 \;, \tag{3}$$

где E_{A_i} – число случаев, когда i-й эксперт принял неверное решение.

Ставится задача на основе имеющейся априорной информации построить формальную модель, обеспечивающую минимум средней вероятности коллективного решения $D = D(\delta_1, \delta_2) \in \{1,2\}$ о неизвестных состояниях объекта в конфликтных ситуациях (2).

Доказана следующая теорема, которая являются интервальным обобщением одного из результатов, полученных в работе [1].

Теорема 1. Коллективное решение обеспечит с доверительной вероятностью β минимум средней вероятности ошибки, если в конфликтной ситуации $S_{m_1 m_2}$, $m_1, m_2 = 1,2 \;\; m_1 \neq m_2$ принимать окончательное решение в пользу V_1, когда

$$P(V_1)(P^{c(m_2)} - r^{(m_2)})(1 - P^{c(m_1)} - r^{(m_1)}) > [1 - P(V_1)](P^{c(m_1)} + r^{(m_1)})(1 - P^{c(m_2)} + r^{(m_2)}), \tag{4}$$

и решение в пользу V_2, когда

$$P(V_1)(P^{c(m_2)}+r^{(m_2)})(1-P^{c(m_1)}+r^{(m_1)})<[1-P(V_1)](P^{c(m_1)}-r^{(m_1)})(1-P^{c(m_2)}-r^{(m_2)}), \quad (5)$$

где

$$P^{c^{(i)}}=\frac{P^{*(i)}+t_\beta^2/2n}{1+t_\beta^2/n}, \quad r^{(i)}=\frac{t_\beta\sqrt{\dfrac{P^{*(i)}(1-P^{*(i)})}{n}+\dfrac{t_\beta^2}{4n^2}}}{1+t_\beta^2/n}$$

– соответственно центр и радиус доверительного интервала $\mathbf{I}=\langle P^{c^{(i)}}, r^{(i)}\rangle$, который с вероятностью β накрывает неизвестное значение вероятности ошибки частного решения $i-$го эксперта, $i=1,2$, а t_β - функция, обратная гаусовской функции распределения $F\left(\dfrac{1+\beta}{2}\right)$.

Очевидно, что конфликтная ситуация остается неразрешенной, если не будет выполняться ни одно из условий теоремы 1. Заметим, что такой случай возможен, даже если не пересекаются доверительные интервалы I_{A1} и I_{A2}.

На рис. 1 представлены примеры областей коллективного решения согласно условиям (4), (5) при оценке состояния объекта с априорными вероятностями $P(V_1)=0{,}8$ и $P(V_2)=0{,}2$ в конфликтной ситуации S_{12}. Серым цветом выделены области значений частот $P^*_{A_i}$, при которых конфликтная ситуация не может быть разрешена.

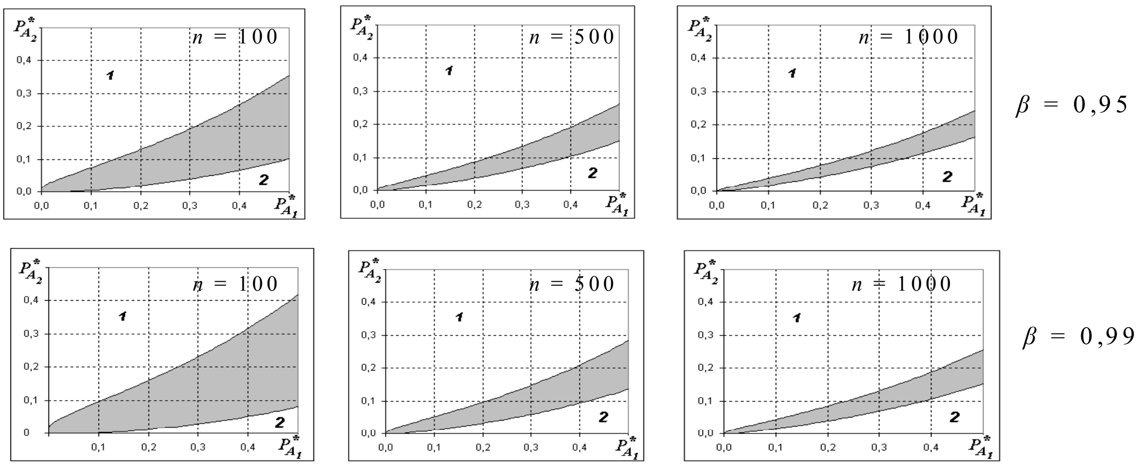


Рис.1. Пример разрешения конфликтной ситуации S_{12} при $\lambda=0{,}25$:

область 1 – коллективное решение в пользу состояния V_1;

область 2 – коллективное решение в пользу состояния V_2.

Легко видеть, что область неразрешенного конфликта (серая область рис. 1) уменьшается с увеличением объема n экспериментальной выборки и увеличивается с ростом доверительной вероятности β.

Для решения практических задач представляет интерес определение условий, налагаемых на объем n экспериментальной выборки, по которой должны быть оценены частоты ошибок экспертов для последующего разрешения конфликтных ситуаций согласно предложенной модели.

Справедлива следующая теорема.

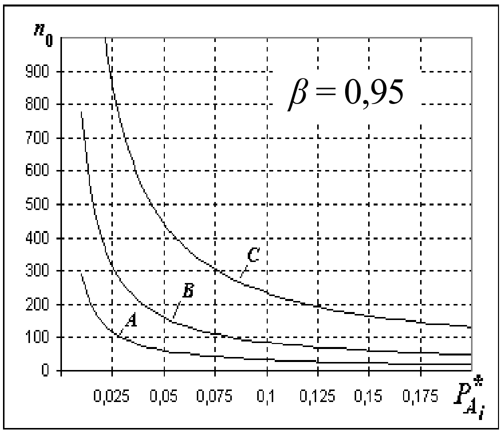
Теорема 2. Для любых $P(V_i)$, β существует такое число $n^* > 0$, что после оценки частот $P^*_{A_i}$ по репрезентативной выборке объемом $n > n^*$ модель коллективных решений обеспечит разрешение возможных конфликтных ситуаций на основе условий теоремы 1.

Важным для практики следствием теоремы 2 является возможность численной оценки объема n экспериментальной выборки, необходимого для разрешения конфликтных ситуаций. Для заданных значений $P(V_i)$ и β необходимое число экспериментов n_0, при котором конфликтные ситуации могут быть разрешены на основе соотношений (4), (5), определяется соотношением

$$n_0 = \left[t_\beta^2 \frac{\sqrt{\lambda}(P^*_{A_2} + \sqrt{\lambda} P^*_{A_1})(\sqrt{\lambda}(1 - P^*_{A_2}) + (1 - P^*_{A_1}))}{(P^*_{A_2}(1 - P^*_{A_1}) - \lambda P^*_{A_1}(1 - P^*_{A_2}))^2} + 1 \right], \qquad (47)$$

где $[\eta]$ – целая часть числа η.

На рис. 2 приведены графики зависимости числа опытов n_0 от значений частот ошибок экспертов $P^* = P^*_{A_1} = P^*_{A_2}$ для фиксированных значений λ при доверительных вероятностях $\beta = 0{,}95$ (рис. 2, а) и $\beta = 0{,}99$ (рис. 2, б).



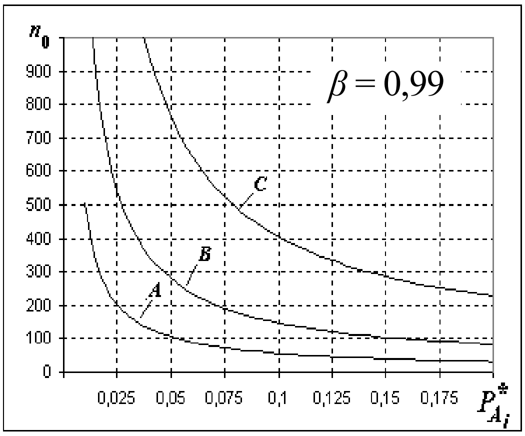


Рис. 2. Зависимости требуемого объема экспериментальной выборки от квалификаций экспертов при различных значениях λ:
A – $\lambda = 0{,}11$ и $\lambda = 9$; ***B*** – $\lambda = 0{,}25$ и $\lambda = 4$; ***C*** – $\lambda = 0{,}43$ и $\lambda = 2{,}33$;

Заметим, что необходимое число опытов n_0 возрастает при уменьшении частот $P^*_{A_i}$, а также при $\lambda \to 1$.

1. *Файнзильберг Л.С.* Байесова схема принятия коллективных решений в условиях противоречий // Проблемы управления и информатики. – 2002. – № 3. – С. 112-122.
2. *Жуковська О.А., Новицький В.В.* Прямий метод обчислення добутку інтервалів у формі центр-радіус // Наук. вісті НТУУ “КПІ”. – 2003. – № 1. – С. 138 – 144.