

УДК 519.816

ДОСТАТОЧНЫЕ УСЛОВИЯ ОТСУТСТВИЯ РЕВЕРСА РАНГОВ АЛЬТЕРНАТИВ ПРИ МУЛЬТИКРИТЕРИАЛЬНОМ ОЦЕНИВАНИИ

В.Г. Тоценко

Институт проблем регистрации информации НАН Украины

e-mail: totsenko@mail.ru

В ряде исследований был открыт такой специфический феномен, как реверс рангов [1-5]. Сущность его заключается в изменении рангов рейтингов альтернатив, вычисленных по результатам мультикритериального оценивания при увеличении/уменьшении их количества. При этом матрицы парных сравнений “старых” альтернатив сохраняются. Неизменны и относительные веса критериев. Изменение числа альтернатив является необходимым, но недостаточным условием проявления реверса рангов. Феномен реверса рангов нежелателен, поэтому предпринимались попытки его устранения. В [2] утверждалось, что причиной реверса рангов является наличие хотя бы одной пары близких копий альтернатив, т.е. альтернатив, различающихся по всем критериям не более, чем на ε %. При наличии таких альтернатив они рассматриваются как близкие копии и для их различения следует добавить новый критерий. Экспериментально установлено, что $\varepsilon = 10\%$. Вместе с тем в [3] показано, что отсутствие близких копий альтернатив не является достаточным условием отсутствия реверса рангов. В примере, приведенном в этой работе, реверс рангов наблюдается, несмотря на отсутствие близких копий альтернатив.

Сохранение рангов альтернатив есть свойство, которое можно сформулировать таким образом:

$$\forall 1 < i, j \leq n [\{ (r_i > r_j) / |A| = n \} \rightarrow \{ (r_i > r_j) / |A'| = n + 1 \}].$$

где $A = \{a_i\}, i = (1, n)$ - множество альтернатив; $A' = A \cup a_{n+1}$;

r_i, r_j – ранги альтернатив a_i, a_j соответственно,

Другими словами, отношение рангов альтернатив не зависит от их количества.

В [5] приведен пример нарушения этого условия при использовании метода Саати [6] обработки матрицы парных сравнений (МПП) для вычисления рейтингов альтернатив и аддитивной функции их полезности. Реверс рангов альтернатив проявляется в следующем. Вначале вычисляются рейтинги альтернатив a_1, a_2, a_3 по результатам их оценивания по равнозначным критериям А, В, С. При этом получено ранжирование $a_2 \succ a_1 \succ a_3$. Затем к этим альтернативам добавляется a_4 . При сравнении четырех альтернатив по всем критериям степени преимуществ альтернатив a_1, a_2, a_3 - такие же, что и при сравнении этих трех альтернатив между собою без четвертой. Тем не менее отношение рейтингов следующее: $a_1 \succ (a_2 = a_4) \succ a_3$. Другими словами альтернативы a_1, a_2 поменялись рангами.

Проанализируем этот феномен. При условии независимости критериев по предпочтениям рейтинги альтернатив, по которым определяются их ранги, являются значения аддитивной функции полезности [2]. Для трех альтернатив имеем:

$$\rho_i = F_i(W, V) = \sum_{j=1}^m w_j v_{ij}; \quad (1)$$

соответственно для четырех альтернатив:

$$\chi_i = \Phi_i(W, \Psi) = \sum_{j=1}^m w_j \psi_{ij}. \quad (2)$$

w_j – относительный вес j -о критерия; v_{ij}, ψ_{ij} – относительные веса альтернативы a_i по j -у критерию при трех и четырех альтернативах соответственно.

Задачу определения условия отсутствия реверса рангов можно сформулировать таким образом.

Дано: Множества альтернатив $A = \{a_i\}, i = (1, n)$; $A' = \{a_h\}, h = (1, n+1)$; $A' = A \cup a_{n+1}$; множество критериев $K = \{k_j\}, j = (1, m)$; множество коэффициентов относительной значимости критериев $W = \{w_j\}$; множество $V = \{v_{ij}\}$ коэффициентов относительной значимости альтернатив относительно критериев, где v_{ij} – коэффициент значимости i -й альтернативы $a_i \in A$ относительно j -го критерия; множество $\Psi = \{\psi_{ij}\}$ коэффициентов значимости t -й альтернативы $a_h \in A'$ относительно j -го критерия; функции $F_i(W, V), \Phi_i(W, \Psi)$ вычисления рейтингов альтернатив $a_i \in A, a_i \in A'$ соответственно.

Надо определить условия сохранения рангов альтернатив по значениям их рейтингов при переходе от множества A к множеству A' , то есть выполнение условия: $\forall 1 \leq i, \gamma \leq n, a_i \in A, a_r \in A' [\{F_i(W, V) > F_r(W, V)\} \rightarrow \{\Phi_i(W, \Psi) > \Phi_r(W, \Psi)\}]$ (3)

Условие

$$F_i(W, V) > F_r(W, V)$$

с учетом (1), можно записать в виде:

$$[\sum_{j=1}^m w_j (v_{ij} - v_{rj})] > 0; \quad (4)$$

а условие $\Phi_i(W, \Psi) > \Phi_r(W, \Psi)$ с учетом (2) превратить в такое неравенство:

$$[\sum_{j=1}^m w_j (\psi_{ij} - \psi_{rj})] > 0. \quad (5)$$

При этом достаточное условие (3) отсутствия реверса рангов с учетом (4), (5) записывается таким образом:

$$\forall 1 \leq i, \gamma \leq n, a_i \in A, a_r \in A' [\{\sum_{j=1}^m w_j (v_{ij} - v_{rj})\} [\sum_{j=1}^m w_j (\psi_{ij} - \psi_{rj})]] > 0. \quad (6)$$

Определим класс преобразований весов альтернатив при переходе от множества A к множеству A' , при которых выполняется условие (6). Это даст возможность определить требования к алгоритмам вычисления весов альтернатив по множеству их преимуществ при парных сравнениях.

Теорема 1.

Если $\forall 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m [\psi_{ij} = \alpha^\lambda v_{ij} + \beta], \alpha > 0,$ (7)

то ранги альтернатив сохраняются.

Доказательство.

Подставляя (7) в (6), получаем:

$$C = \alpha^\lambda [\sum_{j=1}^m w_j (v_{ij} - v_{rj})]^2.$$

Нетрудно видеть, что при $\alpha > 0$ имеем $C > 0$ при любых преимуществах альтернативы a_i над альтернативой a_r , что и доказывает теорему.

Таким образом, преобразование (7) сохраняет ранги альтернатив при увеличении количества альтернатив и сохранении преимуществ между альтернативами исходного множества A .

Отметим, что (7) есть достаточным условием, то есть выполнение его гарантирует отсутствие реверса рангов, но невыполнение его не является достаточным условием наличия реверса рангов. Возникает вопрос: существуют ли методы вычисления весов альтернатив относительно критериев, результаты применения которых к произвольной матрице парных сравнений удовлетворяют требованию (7)? Чтобы найти ответ на этот вопрос, выполним анализ известных методов экспертного оценивания.

Невыполнение достаточных условий отсутствия реверса рангов при использовании метода Саати парных сравнений [6] доказано приведенным в [5] примером, описанным выше. Поэтому рассмотрим другие методы экспертного оценивания.

Метод непосредственного оценивания

Для каждого альтернатива $a_i \in A$ определяют число σ_{ij} , которое есть экспертной оценкой значимости альтернатива a_i относительно критерия, по которому оцениваются альтернативы. Нетрудно видеть, что использованию ненормированных оценок $v_{ij} = \sigma_{ij}$ значимости альтернатив отвечает случай, когда веса альтернатив не зависят от их количества, то есть $\forall 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m [v_{ij} = \psi_{ij}]$.

Таким образом, при использовании метода непосредственного оценивания для определения ненормированных значений оценок значимости альтернатив достаточное условие (7) отсутствия реверса рангов выполняется.

Метод парных сравнений “линия” [7]

Пусть задано некоторое множество $A = \{a_i\}, i = (1, n)$ альтернатив, для которых надо определить коэффициенты значимости v_{ij} по j -у критерию $j = (1, m)$. Предложим эксперту произвольно выбрать некоторую альтернативу a_e и выполнить её попарное сравнение с каждой из $(n-1)$ альтернатив, которые остались. Вследствие этого будет получено множество $D_e = \{d_{ei}\}, i \neq e$ степеней преимущества альтернативы a_e над другими. Введем понятие абсолютного веса σ_{ij} альтернативы a_i , под которым будем понимать количественную меру степени выраженности у неё свойства, которое описывается j -м критерием. Присвоим альтернативе a_e вес σ_{ej} . Зададим функцию

$$\sigma_{ij} = f(\sigma_{ej}, d_{ei}) \quad (8)$$

и вычислим веса всех других альтернатив.

Очевидным требованием к функции (8) есть монотонность. Вид этой функции зависит от типа вопросов, которые ставятся перед экспертом в ходе парных сравнений. Она может быть либо мультипликативной, либо аддитивной [7].

Для получения коэффициентов значимости альтернативов v_{ij} достаточно разделить абсолютные веса σ_{ij} на величину σ_{ej} :

$$v_{ij} = \varphi(d_{ei}) \quad (9)$$

Из (9) следует, что при мультипликативном алгоритме парных сравнений коэффициенты значимости альтернатив не зависят от величины абсолютного веса альтернативы, с которым сравниваются все другие, а также от количества альтернатив, то есть

$$\forall 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m [v_{ij} = \psi_{ij}],$$

что свидетельствует о выполнении достаточного условия отсутствия реверса рангов при использовании ненормированных относительно суммы коэффициентов значимости (весов) альтернатив. Особенностью применения метода „ линия” есть необходимость сохранения эталонной альтернативы при изменении состава множества альтернатив.

Модифицированный метод аналитических иерархических процессов (АНРА)

Как было показано выше, использование в методе аналитических иерархических процессов (АНР) метода Саати для определения относительных весов приводит к невыполнению достаточного условия отсутствия реверса рангов и, как следствие, к появлению реверса рангов при некоторых условиях. Если предполагается определять рейтинги альтернатив при условии дополнения/сокращения их множества, то с целью исключения возможности возникновения феномена реверса рангов следует отказаться от использования относительных весов, которые удовлетворяют уравнению нормализации. Вместо этого следует характеризовать альтернативы ненормированными относительно суммы весами, величины которых не зависят от количества альтернатив. То же касается и весов критериев. Функция полезности при условии независимости критериев по преимуществам совпадает с той, что используется в классическом АНР:

$$F_i = \sum_{r_{i0}^q \in R_{i0}} S(r_{i0}^q) \quad (10)$$

где $S(r_{i0}^q)$ – чувствительность по q – в пути от альтернативы a_i в корневую вершину. $S(r_{i0}^q)$ равняется произведению весов дуг, которые входят в путь r_{i0}^q ; R_{i0} – множество путей от альтернативы a_i в корневую вершину.

При этом функция полезности (рейтинги) может принимать значения, большие 1. При необходимости эти значения нормируют по сумме.

Нетрудно видеть, что, используя (10) для ненормированных значений показателей значимости альтернатив (подкритериев), определенных методами непосредственного оценивания или «линия», можно вычислять ненормированные значения рейтингов альтернатив относительно любого, в том числе и главного, критерия. Таким образом, метод АНРА может быть применен к дереву иерархии критериев произвольной сложности.

Заключение

На основе проведенного анализа можно сделать такие выводы.

1. Использование нормированных весов при мультикритериальном оценивании альтернатив не обеспечивают выполнения достаточных условий отсутствия реверса рангов.
2. Достаточному условию отсутствия реверса рангов альтернатив удовлетворяют методы определения ненормированных значений весов альтернатив: метод непосредственного оценивания, метод „линия”.
3. Модифицированный метод аналитических иерархических процессов (АНРА) позволяет вычислять как ненормированные так и нормированные значения рейтингов альтернатив при использовании иерархии критериев произвольной сложности.

Литература

1. Belton V., Gear T. On a shortcoming of Saaty's method of analytic hierarchies, //Omega, 11,1983, p. 228-230.
2. Saaty T.L. Rank generation, preservation, and reversal in analytic hierarchy process, Decision Science, 18,1987, p. 157-177.
3. Dyer J.S. Remarks on the analytic hierarchy process, Management Sci. 36, 1990, p. 249-258.
4. Ramanathan R., Ganesh L.S. Group preference aggregation methods employed in AHP: an evaluation and an intrinsic process for deriving members' weightaqqes // European J. Oper. Res. 79, 1994, p. 249-265.
5. Kumar N.V., Ganesh L.S. An empirical analysis of the use of the Analytic Hierarchy Process for estimating membership values in a fuzzy set //Fuzzy Sets and Systems, 82 ,1996, p. 1-16.
6. Saaty T.L. The Analytic Hierarchy Process. – N. Y.: McGraw-Hill, 1980.
7. Тоценко В.Г. Генерация алгоритмов парных сравнений для моделирования предпочтений эксперта при поддержке принятия решений, часть1// Электронное моделирование №3, 2000,с.11-24(Totsenko V.G. Generation of Pair Comparisons Algorithms for Simulation of Expert Preferences during Decision Making Support, Part 1// Engineering Simulation, 2001, vol.18,pp. p. 303-316).