УДК 681.3

ИНТЕРВАЛЬНАЯ МОДЕЛЬ ПРИНЯТИЯ РЕШЕНИЙ КОЛЛЕКТИВОМ НЕЗАВИСИМЫХ ЭКСПЕРТОВ

Л.С. Файнзильберг[*], О.А. Жуковская[**]
[**]*МНУЦ ИТИС*, [**]*НТУУ КПИ*
e-mail: fainzilberg@voliacable.com

В работах [1], [2] предложена интервальная модель построения коллективного решения группы независимых экспертов в условиях риска, основанная на использовании байесовских стратегий. Доказано, что такая модель, предполагая знания только частот ошибочных решений экспертов, с заданной доверительной вероятностью обеспечивает минимум средней вероятности ошибки коллективного решения.

В тоже время известно, что средняя вероятность ошибочных решений не учитывает соотношение потерь от ошибок разного рода, которые для большинства практических задач неравнозначны. Например, известно [3], что при скрининге опасных заболеваний потери, связанные с ошибочным пропуском больного пациента во много раз превышает потери от ложного отнесения здорового пациента к группе больных.

Цель данной работы – обобщение предложенных ранее интервальных моделей на случаи, когда критерием оптимальности служит минимум среднего риска коллективного решения.

Постановка задачи. **Пусть некоторый объект находится в одном из множества возможных состояний $V = \{V_1,...,V_m\}$, $m = \overline{1,M}$. Каждый из N экспертов $A_1,..., A_N$ независимо друг от друга принимают частные решения о текущем состоянии объекта в виде индикаторной переменной**

$$\delta_i = m \text{, если } A_i \text{ принял решение в пользу } V_m,\ m = \overline{1,M},\ i = \overline{1,N}. \qquad (1)$$

Предполагается, что на основе репрезентативной выборки n наблюдений с известными состояниями объекта определено число случаев n_k, когда объект находился в состоянии V_k, а также число случаев $n_{mk}^{(i)}$, когда i-й эксперт принял частное решение в пользу состояния V_m, в то время как объект находился в состоянии V_k.

При таких априорных сведениях ставится задача построения модели принятия коллективного решения

$$D = m \text{, если коллектив принял решение в пользу } V_m,\ m = \overline{1,M},$$

которая с заданной доверительной вероятностью β обеспечит минимум среднего риска коллективного решения на множестве

$$\mathbf{\Theta} = \{S_{m_1...m_N} : (\delta_1 = m_1) \wedge ... \wedge (\delta_N = m_N),\ m_1,...,m_N = \overline{1,M}\} \qquad (2)$$

возможных комбинаций $S_{m_1...m_N}$ частных решений экспертов (1).

Оптимальная модель принятия коллективных решений. **Прежде чем переходить к решению поставленной задачи рассмотрим оптимальную модель принятия коллективных решений, основанную на минимизации среднего риска.**

Лемма 1. Пусть

а) известно распределение вероятностей состояний объекта $P(V_k)$, $\sum_{k=1}^{M} P(V_k)=1$;

б) известны условные вероятности $P(\delta_i = m \mid V_k)$, $m,k=\overline{1,M}$, $i=\overline{1,N}$ частных решений каждого с $N \geq 2$ независимых экспертов коллектива;

в) задана платежная матрица $L = \left\| L_{km} \right\|$, элементы которой характеризуют потери от коллективного решения $D = m$, $m=\overline{1,M}$ при истинном состоянии объекта V_k, $k=\overline{1,M}$.

Тогда коллективное решение $D = m$, $m=\overline{1,M}$ будет оптимальным с точки зрения минимума среднего риска на множестве возможных ситуаций (2), если коллективное решение принимается по схеме

$$D_S^{opt} = \arg \min_{D_S \in [1,M]} \sum_{k=1}^{M} L_{kD_S} P(V_k) \prod_{i=1}^{N} P(\delta_i \mid V_k). \tag{3}$$

где $D_S = \overline{1,M}$ – коллективное решение в наблюдаемой ситуации $S \in \mathbf{\Theta}$.

Субоптимальная модель принятия коллективных решений. Понятно, что на практике применение оптимальной модели затруднительно, поскольку точные значения вероятностных характеристик, фигурирующих в правой части (3), чаще всего неизвестны. Поэтому перейдем от оптимальной модели (3) к ее интервальному аналогу, используя следующее определение.

Определение. Коллективное решение $\widetilde{D} = m$, $m=\overline{1,M}$ будем называть субоптимальным с точки зрения критерия $\Im$, если $\widetilde{D}$ обеспечивает $\Im$ с заданной доверительной вероятностью.

Понятно, что неизвестные точечные значения априорных вероятностей $P(V_k)$, $P(\delta_i = m \mid V_k)$ могут быть оценены частотами, вычисленными по репрезентативной выборке из n наблюдений с известными состояниями объекта:

$$P^*(V_k) = \frac{n_k}{n}, \quad P^*(\delta_i = m \mid V_k) = \frac{n_{mk}^{(i)}}{n_k}, \; i=\overline{1,N}, \; k,m=\overline{1,M}, \tag{4}$$

где

n_k – число наблюдений, когда объект находился в состоянии V_k,

$n_{mk}^{(i)}$ – число случаев, когда i-й эксперт принял частное решение в пользу состояния V_m, в то время как объект находился в состоянии V_k.

Очевидно, что замена неизвестных вероятностных характеристик оценками (4) правомерна только при достаточно большом объеме наблюдений n.

В той же время из теории вероятностей известно, что для любого значения частоты можно построить доверительный интервал, который с доверительной вероятностью β накроет неизвестное значение вероятностной характеристики, т.е.

$$P(V_k) \in \langle P_{V_k}^c(n,\beta), r_{V_k}(n,\beta) \rangle, \tag{5}$$

$$P(\delta_i \mid V_k) \in \langle P_{mk}^c(n,\beta), r_{mk}(n,\beta) \rangle, \tag{6}$$

где

$P^c_{V_k} = \dfrac{P^*_{V_k} + \dfrac{t^2_\beta}{2n}}{1 + \dfrac{t^2_\beta}{n}}$, $r_{V_k} = \dfrac{t_\beta \sqrt{\dfrac{P^*_{V_k}(1 - P^*_{V_k})}{n} + \dfrac{t^2_\beta}{4n^2}}}{1 + \dfrac{t^2_\beta}{n}}$ – соответственно центр и радиус доверительного интервала, который с доверительной вероятностью β накроет неизвестное значение вероятности нахождения объекта в состоянии V_k , а

$P^c_{\delta_i|V_k} = \dfrac{P^*_{\delta_i|V_k} + \dfrac{t^2_\beta}{2n}}{1 + \dfrac{t^2_\beta}{n}}$, $r_{\delta_i|V_k} = \dfrac{t_\beta \sqrt{\dfrac{P^*_{\delta_i|V_k}(1 - P^*_{\delta_i|V_k})}{n} + \dfrac{t^2_\beta}{4n^2}}}{1 + \dfrac{t^2_\beta}{n}}$ – центр и радиус доверительного интервала, который с доверительной вероятностью β накроет неизвестное значение вероятности ошибки частного решения $i -$го эксперта, $i = \overline{1, N}$, а $t_\beta = \arg F\left(\dfrac{1+\beta}{2}\right)$ – функция, обратная гауссовой функции распределения $F\left(\dfrac{1+\beta}{2}\right)$.

Показано, что минимум среднего риска будет обеспеченным, если в каждой наблюдаемой ситуации S принимать коллективное решение $\widetilde{D} = l$, $l = \overline{1, M}$, если

$$\widetilde{R}_S(l) < \widetilde{R}_S(m),\ \forall m = \overline{1, M},\ m \neq l\,, \tag{7}$$

где

$$\widetilde{R}_S(l) = \sum_{k=1}^{M} L_{kl} P(V_k) \prod_{i=1}^{N} P(\delta_i = l \mid V_k)\,, \tag{8}$$

$$\widetilde{R}_S(m) = \sum_{k=1}^{M} L_{km} P(V_k) \prod_{i=1}^{N} P(\delta_i = m \mid V_k)\,. \tag{9}$$

На основе соотношений (7) – (9), построим субоптимальную модель, гарантирующую принятие субоптимальных решений коллектива экспертов в ситуациях противоречий их личных решений согласно критерию минимума среднего риска.

Будем характеризовать возможные потери от коллективного решения $\widetilde{D} = m$, $m = \overline{1, M}$ при истинном состоянии объекта V_k интервальной платежной матрицей $\mathbf{L} = \|\mathbf{L}_{km}\|$, где

$$\mathbf{L}_{km} = \langle L^c_{km}, r_{L_{km}} \rangle\,.$$

Учитывая (5)–(6), перейдем от соотношений (8), (9) к их интервальным аналогам

$$\widetilde{\mathbf{R}}_S(l) = \sum_{k=1}^{M} \langle L^c_{kl}, r_{L_{kl}} \rangle \langle P^c_{V_k}, r_{V_k} \rangle \prod_{i=1}^{N} \langle P^c_{lk}, r_{lk} \rangle\,,$$

$$\widetilde{\mathbf{R}}_S(m) = \sum_{k=1}^{M} \langle L^c_{km}, r_{L_{km}} \rangle \langle P^c_{V_k}, r_{V_k} \rangle \prod_{i=1}^{N} \langle P^c_{mk}, r_{mk} \rangle\,.$$

Согласно условию (7) оптимальное коллективное решение должно приниматься, основываясь на сравнении точечных величин $\widetilde{R}_S(l) \in \widetilde{\mathbf{R}}_S(l)$, $\widetilde{R}_S(m) \in \widetilde{\mathbf{R}}_S(m)$, $\forall m = \overline{1, M}$, $m \neq l$, что возможно только тогда, когда $\widetilde{\mathbf{R}}_S(l) \cap \widetilde{\mathbf{R}}_S(m) = \varnothing$.

Теорема. Коллективное решение $\widetilde{D} = l$, $l = \overline{1, M}$ является субоптимальным с точки зрения минимума среднего риска ошибки на множестве (2) возможных ситуаций S, если это решение принимается в пользу l-го состояния $l = \overline{1, M}$ при условии

$$\widetilde{R}_l^c + r_{\widetilde{R}_l} < \widetilde{R}_m^c - r_{\widetilde{R}_m}, \ \forall m = \overline{1, M}, m \neq l,$$

где

$$\widetilde{R}_l^c + r_{\widetilde{R}_l} = \sum_{\substack{k \in [1,M] \\ k \neq l}} (L_{kl}^c + r_{L_{kl}})(P_{V_k}^c + r_{V_k}) \prod_{i=1}^{N} (P_{lk}^c + r_{lk}) +$$

$$+ \begin{cases} (L_{ll}^c + r_{L_{ll}})(P_{V_l}^c + r_{V_l}) \prod\limits_{i=1}^{N} (P_{ll}^c + r_{ll}), & \text{если } (L_{ll}^c \geq r_{L_{ll}}) \vee (|L_{ll}^c| < r_{L_{ll}}), \\ (L_{ll}^c + r_{L_{ll}})(P_{V_l}^c - r_{V_l}) \prod\limits_{i=1}^{N} (P_{ll}^c - r_{ll}), & \text{если } L_{ll}^c \leq -r_{L_{ll}}, \end{cases}$$

$$\widetilde{R}_m^c - r_{\widetilde{R}_m} = \sum_{\substack{k \in [1,M] \\ k \neq m}} (L_{km}^c - r_{L_{km}})(P_{V_k}^c - r_{V_k}) \prod_{i=1}^{N} (P_{mk}^c - r_{mk}) +$$

$$+ \begin{cases} (L_{mm}^c - r_{L_{mm}})(P_{V_m}^c - r_{V_m}) \prod\limits_{i=1}^{N} (P_{mm}^c - r_{mm}), & \text{если } L_{mm}^c \geq r_{L_{mm}}, \\ (L_{mm}^c - r_{L_{mm}})(P_{V_m}^c + r_{V_m}) \prod\limits_{i=1}^{N} (P_{mm}^c + r_{mm}), & \text{если } (L_{mm}^c \leq -r_{L_{mm}}) \vee (|L_{mm}^c| < r_{L_{mm}}). \end{cases}$$

Список литературы

1. Жуковская О.А., Файнзильберг Л.С. Интервальное обобщение байесовской модели принятия коллективного решения в конфликтных ситуациях // Кибернетика и системный анализ. – 2005. – №3. – С. 133–144.

2. Файнзильберг Л.С., Жуковская О.А. Интервальная модель принятия коллективного решения в условиях риска // Системи підтримки прийняття рішень. Теорія і практика. Збірник доповідей науково-практичної конференції з міжнародною участтю. – Київ: ІПММС НАНУ, 2006. – С.113–115.

3. Власов В.В. Эффективность диагностических исследований. – М: Медицина, 1988. – 256 с.