

РАЗВИВАЮЩИЕСЯ СИСТЕМЫ

А.М. Резник

Институт математических машин и систем НАН Украины

e-mail: neuro@immssp.kiev.ua

Введение

Понятие развития можно относить к различным сущностям. Говоря о развитии растения, химической реакции или теории, мы имеем в виду различные объекты. В первом случае это материальный объект, во втором – процесс, а в последнем – понятие, существующее в сознании ученых. Во всех этих случаях речь идет о некоторых внутренних изменениях, при которых сущность объекта сохраняется. Поэтому подобные объекты, назовем их развивающимися системами, можно рассматривать как своеобразные динамические системы, смысл существования которых состоит в сохранении самих себя в реальных условиях окружения.

Динамические системы и внешняя среда.

В общей теории систем [1] динамическую систему определяют многоместным отношением на множестве пар временных объектов $\{X_t, Y_t\} : X_t \in \Xi, Y_t \in H, t \in T$. Здесь T - линейно упорядоченное множество моментов времени, X_t и Y_t - текущие значения входного и выходного объектов системы. Упорядоченность моментов времени позволяет представить это отношение последовательностью $\{X_t, Y_t, A_t\}$, где $A_t \in \mathfrak{R}$ - текущее состояние системы. Такое представление соответствует модели «черного ящика», в которой значения X_t и Y_t доступны для наблюдения, а состояние A_t является скрытым параметром системы. Поведение динамической системы описывают двумя соотношениями:

$$Y_t = F(X_t, A_t), \quad (1)$$

$$A_t = \Phi(A_{t-\tau}, X_{t-\tau}^t), \quad (2)$$

первое из которых называют уравнением вход/выход, а второе – уравнением состояний. Величина $X_{t-\tau}^t \in R^{n \times T}$ представляет реализацию n -мерного вектора X_t на интервале наблюдения $(t-\tau, t)$. Состояние $A_t \in \mathfrak{R} \subset R^{n \times T}$ отражает предыдущее поведение системы. Мощность множества состояний $|\mathfrak{R}|$ характеризует степень сложности системы.

Выражения (1-2) определяют детерминированную динамическую систему, которая может существовать независимо от своего окружения. Любая реальная система существует в окружении, которое представляет собой инверсную динамическую систему. Её выход является входом данной системы, а вход - её выходом. Окружение обычно намного сложнее системы, поэтому его состояние $B_t \in \mathfrak{S}$ при $|\mathfrak{S}| \gg |\mathfrak{R}|$ не зависит от состояния данной системы. Уравнения вход/выход окружающей среды можно представить как инверсию (1):

$$X_t = F^*(Y_t, B_t). \quad (3)$$

Условием сосуществования системы и ее окружения является выполнение равенства:

$$Y_t = F[F^*(Y_t, B_t), A_t]. \quad (4)$$

Данное условие равнозначно требованию эквивалентности множеств $\mathfrak{S} \equiv \mathfrak{R}$, что противоречит предположению $|\mathfrak{S}| \gg |\mathfrak{R}|$. Поэтому условие сосуществования может выполняться лишь для случайного значения реализации входа $X_{t-\theta}^t$, в пределах конечного

интервала θ , определяющего время жизни детерминированной системы в реальном окружении.

Общая теория систем базируется на предположении об открытости окружения, гарантирующем выполнение условия (4). Детерминированные системы, отвечающие этим требованиям, представляют фундаментальные системы, отражающие общие законы Природы.

Мы будем рассматривать нефундаментальные детерминированные системы, экземпляры которых могут существовать лишь в течение времени жизни заданного условием (4). При его нарушении данный экземпляр системы должен заменяться другим, начальное состояние которого удовлетворяет условию сосуществования. Поведение такой системы представляет релаксацию - чередование спокойных периодов скрытого накопления изменений и скачкообразных переходов в новое начальное состояние. Такие системы мы будем называть развивающимися.

Простейшей развивающейся системой, является популяция, члены которой (индивиды) представляют собой элементарные системы, способные к размножению. Изменение распределения их численности описывает стохастическая составляющая поведения развивающейся системы. Детерминированная составляющая поведения характеризует генотип системы, описывающий поведение членов популяции в пределах времени их жизни. Эволюция началась с появления нефундаментальных систем, способных к релаксации, из которых образовались примитивные системы, способные к размножению. Рост популяций таких систем приводил к заполнению пространства вокруг каждой из них другими подобными ей системами и усилению их взаимного влияния внутри популяции. Имея одинаковый генотип, примитивные системы могли интерпретировать реакции соседей и соответственно изменять собственные реакции. В ходе эволюции простейшие развивающиеся системы приобретали способность координировать реакции членов популяции на воздействия внешней среды. Это вело к интеграции популяций, их превращению в целостные макросистемы. Популяции примитивных систем образовывали примитивные макросистемы. В ходе эволюции из популяции примитивных макросистем возникали более сложные макросистемы, что вело к образованию все более сложных организмов, представляющих современную живую природу.

На вход каждого члена макросистемы действует композиция, состоящая из реакций других членов и воздействий внешней среды:

$$X_t^i = G^i V_{t_0}^t \oplus \Xi_t^i, \quad (5)$$

где: $V_{t_0}^t = \{v_{\theta}^1, \dots, v_{\theta}^k, \dots, v_{\theta}^K\}_{t_0}^t$ - реализация совместной реакции K членов макросистемы;

G^i - оператор Грина внутренней среды популяции;

Ξ_t^i - воздействие внешней среды на i -го члена макросистемы в момент t .

Соотношения между членами композиции (5) для различных членов макросистемы могут существенно отличаться. Эти различия минимальны в дисперсных макросистемах, состоящих из удаленных друг от друга элементарных систем. Примером дисперсной макросистемы может служить колония бактерий, для которой объединяющим фактором являются условия общей внешней среды. Размножение бактерий осуществляется путем деления индивидов, которые выжили на протяжении латентного периода. Деление обеспечивает передачу эстафеты жизни наследникам и почти не влияет на условия существования остальных членов колонии.

В консолидированных макросистемах, будем называть их организмами, состоящих из тесно расположенных членов популяции, поведение каждого из них больше зависит от реакций соседей, чем от воздействия внешней среды. При этом соотношение между составляющими входного воздействия зависит от позиции внутри организма. Для

периферийных членов преобладающим является влияние внешней среды, тогда как для членов, находящихся внутри организма, это влияние может быть ничтожным. Внешние воздействия поступают внутрь организма в опосредствованной форме реакций пограничных элементарных систем. Для интерпретации этих реакций требовалось усложнение и функциональная специализация элементарных систем, образующих организм. Примеры такой специализации можно наблюдать в строении многоклеточных живых организмов. В процессе индивидуального развития организма клетки, находящиеся в различных условиях относительно внешнего окружения специализируются для выполнения различных функций. Клетки, непосредственно контактирующие с внешней средой, выполняют функции рецепторов и эффекторов. Функцией рецепторов является представление действующих извне стимулов для остальных клеток, специализирующихся на выполнении других функций организма. Эффекторы формируют общую его реакцию. Специализация клеток происходит в ходе индивидуального развития организма, поэтому все клетки организма обладают одинаковым генотипом, заданным зародышевой клеткой.

В отличие от примитивных систем, являющихся детерминированными, с конечным временем жизни, многоклеточный организм представляет собой растущую популяцию, поведение которой меняется вместе с ее ростом. Как и детерминированная система, организм отвечает модели «черного ящика», т.е. имеет вход и выход, доступные для наблюдения, и ненаблюдаемое внутреннее состояние, отражающее совокупность множества состояний членов популяции.

Стохастические динамические системы

Коллективное поведение популяции представим моделью стохастической динамической системы (СДС) описывающей изменение закона распределения вероятностей состояния ее членов [2]. Членами популяции (индивидами) могут быть детерминированные системы, либо более простые СДС. СДС, состоящие из детерминированных элементарных систем, будем называть примитивными.

Поведение индивида определяет генотип ЭС – не зависящая от времени условная вероятность $\Delta(Y/X, A)$, где Y, X – значения выхода и входа, $A \in \mathcal{R}$ – состояние ЭС. В СДС понятие состояния ассоциируется не с величиной A , как в детерминированной системе, а с текущим распределением вероятностей состояния индивидов $P_t(A)$. В примитивной СДС генотип представляет дельта-функция

$$\Delta(Y/X, A) = \delta(Y - F(X, A)), \quad (6)$$

что соответствует детерминированному уравнению вход/выход (1).

Стохастическим эквивалентом уравнений вход/выход и состояния являются [2,3]:

$$P_t(Y/X) = P_t(A)\Delta(Y/X, A), \quad (7)$$

$$P_t(A) = P_{t-\tau}(A)Q(A_{t-\tau}, A_t, X_{t-\tau}^t) \quad (8)$$

где: $Q(A_{t-\tau}, A_t, X_{t-\tau}^t)$ – стохастический оператор развития, описывающий марковский процесс перераспределения состояний индивидов при поступлении реализации $X_{t-\tau}^t$.

Легко показать, что СДС представляет обобщение детерминированной системы. Для этого достаточно представить уравнение (6,7) дельта-функциями:

$$\begin{aligned} \Delta(Y/X, A) &= \delta(Y - F(X, A)) \\ P_t(A) &= \delta(A_t - \Phi(A_{t-\tau}, X_{t-\tau}^t)) \end{aligned} \quad (9)$$

Очевидно, что полученные соотношения идентичны формулам (1, 2).

Если значения оператора развития не зависят от времени, то марковский процесс, описываемый уравнением (8) становится стационарным, и для него может существовать

финальное распределение $P_{\infty}(A)$. Рассмотрим случай, когда оператор развития допускает представление

$$Q(A_{t-1}, A_t, X_{t-1}^t) = \alpha E + (1 - \alpha) \Lambda, \quad (10)$$

где: E – единичный оператор $\mathfrak{R} \times \mathfrak{R}$, α – константа $0 < \alpha < 1$, Λ – стохастическая матрица:

$$\Lambda = \begin{bmatrix} \lambda_1 & \lambda_1 & \dots & \lambda_1 \\ \lambda_2 & \lambda_2 & \dots & \lambda_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \lambda_R & \lambda_R & \dots & \lambda_R \end{bmatrix}, \quad \sum_{i=1}^{\mathfrak{R}} \lambda_i = 1. \quad (11)$$

В этом случае формула (7) приобретает вид:

$$P_{t_T}(A) = \alpha^T P_{t_0}(A) + (1 - \alpha^T) \lambda = \xrightarrow{t_T \rightarrow \infty} \lambda, \quad (12)$$

где λ – вектор-столбец матрицы Λ .

Полученное выражение описывает стохастическую модель обучаемости [4], применяемую при изучении динамики выработки условного рефлекса у подопытных животных.

Уравнения (7-8) отражают точку зрения внешнего наблюдателя, рассматривающего реализацию $X_{t-\tau}^t$ как причину изменения распределения $P_t(A)$. С точки зрения самой СДС окружающая среда является внешней системой, реагирующей на реакции СДС. Поведение внешней среды описывается стохастическими уравнениями

$$P_t(X/Y) = P_t(B) \nabla(X/Y, B); \quad (13)$$

$$P_t(B) = P_{t-\tau}(B) R(B_{t-\tau}, B_t, Y_{t-\tau}^t), \quad (14)$$

где: $\nabla(X/Y, B)$ – генотип внешней среды;

$P_t(B)$, – текущее распределение состояний индивидов внешней среды;

$R(B_{t-\tau}, B_t, Y_{t-\tau}^t)$ – оператор развития внешней среды.

Уравнения (13-14) представляют стохастическую модель, которую можно выбрать так, чтобы множества состояний индивидов СДС и ее окружения совпадали $A \equiv B \in \mathfrak{R}$. Такую модель будем называть собственной моделью внешней среды. Для собственной модели можно сформулировать соотношения, аналогичные условиям согласованности (4) для детерминированной системы:

$$Q(A_{t-\tau}, A_t, X_{t-\tau}^t) = R(B_{t-\tau}, B_t, Y_{t-\tau}^t). \quad (15)$$

Смысл данного соотношения состоит в том, что различие в поведении СДС и ее окружения выражается как несоответствие собственной модели реальной внешней среде. Возникающее вследствие этого расхождение между прогнозируемым на основе реализации $Y_{t-\tau}^t$, и реальным значениями входа СДС может служить сигналом для соответствующего изменения состава популяции.

Инфинитезимальный оператор

Полагая, что распределение вероятностей состояний $P_t(A)$ является непрерывной функцией времени, найдем производную:

$$\frac{\partial}{\partial t} [P_t(A)] = P_{t-\tau}(A) \frac{\partial}{\partial t} Q(A_{t-\tau}, A_t, X_{t-\tau}^t). \quad (16)$$

Если на интервале времени $(t - \tau, t)$ эта производная существует, то можно найти ее предел:

$$\frac{\partial}{\partial t} [P_t(A)] \xrightarrow{\tau \rightarrow 0} P_t(A) H(A_t, X_t) \quad (17)$$

Величина $H(A_i, X_i)$ является инфинитезимальным оператором СДС, представляющим скорость изменения вероятности пребывания индивида системы в данном состоянии при текущем значении входа системы. Отрицательное значение $H(A_i, X_i)$ указывает на рост вероятности гибели индивида, а положительное - на необходимость увеличения числа индивидов в состоянии A_i , т.е. их размножения.

Если $P_i(A) \neq 0$, (это справедливо, если в популяции представлены все возможные состояния $A_i \in \mathcal{R}$), дифференциальное уравнение (14) имеет решение:

$$P_i(A) = P_{i_0}(A) \exp \left[\int_{t_0}^t H(A_\theta, X_\theta) d\theta \right]. \quad (18)$$

Интеграл в показателе экспоненты описывает процесс накопления изменений поведения СДС в ходе ее эволюции. Аддитивный характер изменений и их зависимость от текущих значений входа СДС X_i , позволяет интерпретировать такие изменения, как накопление информации о поведении окружающей среды.

Соотношения, аналогичные (16-18) можно получить и для внешней среды:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} [P_i(B)] &= P_i(B) G(B_i, Y_i) \\ P_i(B) &= P_{i_0}(B) \exp \left[\int_{t_0}^t G(B_\theta, Y_\theta) d\theta \right] \end{aligned} \quad (19)$$

Здесь величина оператора $G(B_i, Y_i)$ характеризует влияние реакции индивида популяции на изменение распределения состояний внешней среды. Для собственной модели внешней среды значения инфинитезимальных операторов СДС и ее окружения совпадают:

$$H(A_i, X_i) = G(A_i, Y_i). \quad (20)$$

Эта связь между текущими значениями инфинитезимального оператора может использоваться для внешнего управления поведением СДС. Для этого значения $G(A_i, Y_i)$ должны поступать в нее извне, например, в форме дополнительной компоненты входа X_i . Такое управление соответствует обучению с подкреплением.

Заключение

В рассмотренной модели развития мы опирались на аналогию эволюционного процесса, хотя предложенная нами теория стохастических динамических систем носит общий характер и может использоваться для описания самых различных процессов, например некоторых явлений социально-экономического развития [3]. Основным результатом этой теории является разделение детерминированной, т. е. известной (познанной) и стохастической (неизвестной) составляющих сложного процесса, что может быть использовано для формирования нового подхода к анализу сложных систем.

Литература

1. М. Месарович, Я. Такахара Общая теория систем. Математические основы. – М. Мир. 1978. – 311 с.
2. А.М. Резник Многорядные динамические перцептроны / в кн. Перцептрон-система распознавания образов, ред. А.Г. Ивахненко. – Киев. Наукова Думка. 1975.- с. 243-292.
3. Різник О.М. Загальна модель розвитку. // Математичні машини і системи. - 2005. - № 1. – С. 84-98.
4. Буш Р., Мостеллер Ф. Стохастические модели обучаемости. – М. ГИФМЛ. 1962. – 483 с.